МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МИТТАГ – ЛЕФФЛЕРА

Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RATIONAL APPROXIMATION OF THE MITTAG – LEFFLER FUNCTIONS

N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлено, что для функций Миттаг – Леффлера F_γ при $n \ge m-1$ и $n \to \infty$ аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают F_γ равномерно на компакте $D=\{z:|z|\le 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей. В частности, для функций Миттаг – Леффлера доказаны аналоги хорошо известных теорем Д. Браесса и Л. Трефезена, относящихся к аппроксимации функции $\exp(z)$.

Ключевые слова: *аппроксимации Паде*, *асимптотические равенства*, *функции Миттаг – Леффлера*, *рациональные аппроксимации*.

It is shown that for $m-1 \le n$ the Padé approximants $\{\pi_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\}$, which locally deliver the best rational approximations to the Mittag – Leffler functions F_γ, approximate the F_γ as $n \to \infty$ uniformly on the compact set $D=\{z:|z|\le 1\}$ at a rate asymptotically equal to the best possible one. In particular, analogues of the well-know results of Braess and Trefethen relating to the approximation of $\exp(z)$ are proved for the Mittag – Leffler functions.

Keywords: *Padé approximations*, *asymptotic equality*, *Mittag – Leffler functions*, *rational approximations.*

Введение

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0,-1,-2,...\}$, рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(z) =_1 F_1(1,\gamma;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma)_k}, \qquad (0.1)$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера. Ряды вида (0.1) принято называть гипергеометрическими рядами, а их суммы – гипергеометрическими функциями. Напомним, что функция Миттаг – Леффлера [1], [18] задаётся степенным рядом

$$E_{\rho,\beta}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\rho^{-1}+\beta)} (\rho > 0, \beta \in \mathbb{C})$$

и является обобщением показательной функции. Принимая во внимание известное равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где, как и в предыдущей формуле, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что функции (0.1) являются функциями Миттаг – Леффлера. В частности, к таким функциям относится $F_1(z) = e^z = \exp z$.

При $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ рациональная аппроксимация функций $F_\gamma \in \mathcal{F}$ подробно изучалась в [3]. Мы хотим обобщить результаты этой работы, предполагая, что параметр γ может принимать и комплексные значения. Как и в [3] в качестве аппарата приближения будем использовать аппроксимации Паде функции F_γ, однако, метод доказательства основной теоремы будет существенно отличаться от метода этой работы.

Каждой $F_\gamma \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие таблицу Паде $\left[\pi_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\right]_{n,m=0}^{\infty}$, элементами которой являются дроби

$$\pi_{n,m}(z;F_\gamma) = \frac{p_n(z;F_\gamma)}{q_m(z;F_\gamma)}$$

вида

$$r_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m}, \qquad (0.2)$$

которые однозначно определяются тем, что имеют максимально возможный порядок касания к ряду (0.1) в классе рациональных функций вида (0.2) [4]. Для F_γ будем также рассматривать её таблицу Чебышёва $\left[r^*_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\right]_{n,m=0}^{\infty}$, состоящую из рациональных функций (0.2), наилучшим образом приближающих F_γ в равномерной норме, которые определяются из равенств (вообще говоря, неоднозначным образом)

$$R_{n,m}\left(F_\gamma;D\right) = \inf\left\{\left\|F_\gamma - r\right\| : r \in \mathcal{R}_{n,m}\right\} = \\ = \left\|F_\gamma - r^*_{n,m}\right\|,$$

где $\|g\| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}$, $D = \{z : |z| \le 1\}$, а $\mathcal{R}_{n,m}$ – множество всех рациональных функций, представимых в виде (0.2) (если рациональная-функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r^*_{n,m}$ возьмем одну из таких функций).

Для экспоненты первые результаты об асимптотическом поведении строк таблиц Паде и Чебышёва были получены Э. Саффом [5], [6]. Хорошо известно [4], что дроби Паде $\pi_{n,m}(z;f)$ (учитывая современную терминалогию, далее их будем называть аппроксимациями Паде) аналитической в окрестности нуля функции *f* являются локально наилучшими в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ рациональными аппроксимациями степенного ряда, представляющего функцию *f*. Из результатов Э. Саффа, в частности, следует, что при фиксированном m и $n \to \infty$ бесконечно малые величины $\left\|e^z - \pi_{n,m}(z;e^\xi)\right\|$, $\left\|e^z - r^*_{n,m}(z;e^\xi)\right\|$ эквивалетны. Следовательно, для $\exp z$ локальные экстремальные аппроксимационные свойства её аппроксимаций Паде имеют глобальный характер. Позже в [7]–[9] эффект Саффа был установлен и для других целых функций. В этих работах соответствующие утверждения, как и у Э. Саффа, относятся в основном к строкам таблиц Паде и Чебышёва. В [10]–[12] для широкого класса целых функций ($\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, бесселевы функции, интеграл вероятности, функции Миттаг – Леффлера и др.) эффект глобальности экстремальных свойств дробей Паде был установлен для последовательностей $\{\pi_{n,m}(z;f)\}$ элементов таблиц Паде при $n+m \to \infty$ в предположении, что выполнены условия:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m^4}{n} = 0. \tag{0.3}$$

К настоящему времени единственной нетривиальной функцией, для которой таблицы Паде и Чебышёва исследованы в полном объеме, является экспонента. В случае таблицы Паде соответствующее утверждение в виде гипотезы было сформулировано Г. Мейнардусом. Гипотеза Г. Мейнардуса доказана Д. Браессом [13]: для каждого $z \in D$ при $n+m \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^\xi) = \\ = \frac{(-1)^m m!n!e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right).$$

Здесь и далее предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по всем $z \in D$.

Поведение последовательностей элементов таблицы Чебышёва экспоненты полностью описано Л. Трефезеном [14]: при $n+m \to \infty$

$$R_{n,m}\left(e^z;D\right) = \left\|e^z - r^*_{n,m}(z;e^\xi)\right\| = \\ = \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!}\left(1+o(1)\right).$$

Из результатов Д. Браесса и Л. Трефезена следует, что для экспоненты эффект Саффа при $n+m \to \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0. \tag{0.4}$$

В этой связи в [3] было сделано предположение о том, что константа 4 в равенстве (0.3) не является точной. В этой же работе при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера это предположение нашло подтверждение.

Перейдем непосредственно к формулировкам основных результатов данной работы.

***Теорема* 0.1.** *Пусть* $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. *Тогда при* $n \ge m-1$ *и* $n \to \infty$ *равномерно по* $z \in D$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z;F_\gamma) = \\ = \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right). \tag{0.5}$$

Основываясь на тождестве $e^{-z} = 1/e^z$ и определении аппроксимаций Паде, легко показать, что $\pi_{n,m}(z;e^\xi) = 1/\pi_{m,n}(-z;e^\xi)$. Поэтому при исследовании всей таблицы Паде экспоненты без потери общности достаточно рассмотреть поведение её элементов, лежащих не ниже главной диагонали, т. е. при $n \ge m$. Поэтому классический результат Д. Браесса является частным случаем теоремы 0.1. О необходимости условий $n \ge m-1$ в теореме 0.1 при $\gamma \ne 1$ смотри [15].

***Теорема* 0.2.** *Пусть* $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. *Тогда, если* $n \ge m-1$ *и* $m = o(n)$, *то при* $n \to \infty$

$$R_{n,m}\left(F_\gamma;D\right) \sim \frac{m!\left|(\gamma)_n\right|}{\left|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}\right|}. \tag{0.6}$$

Если же $n \ge m-1$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \le 1$, *то при* $n \to \infty$

$$R_{n,m}\left(F_\gamma;D\right) \asymp \frac{m!\left|(\gamma)_n\right|}{\left|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}\right|}. \tag{0.7}$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называются эквивалентными $(\alpha_n \sim \beta_n)$, если $\alpha_n/\beta_n \to 1$ при $n \to \infty$. Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ имеют одинаковый порядок при $n \to \infty$ $(\alpha_n \asymp \beta_n)$, если существуют такие положительные постоянные A и B, для которых $A\alpha_n \le \beta_n \le B\alpha_n$ при $n = 0,1,2,\ldots$.

Сравнивая теоремы 0.1 и 0.2, нетрудно видеть, что если $m = o(n)$, то при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера также имеет место эффект Саффа. В случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} m/n = \theta$,

$0<\theta\le 1$, мы можем лишь утверждать, что б. м. $\left\|F_\gamma-\pi_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\right\|$ и $\left\|F_\gamma-r^*_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\right\|$ имеют одинаковый порядок.

1 Доказательство теоремы 0.1

Доказательство теоремы 0.1 существенно отличается от доказательства аналогичной теоремы из [3], где рассматривался случай действительных γ. В своей основной части оно опирается на два известных в теории аппроксимаций Паде результата, принадлежащих Ван Россуму [16] и А.И. Аптекареву [17].

***Утверждение* 1.1** [16]. *Если* $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ *и* $n\ge m-1$, *то*

$$q_m(z;F_\gamma)F_\gamma(z)-p_n(z;F_\gamma)=$$
$$=\frac{(-1)^m m!z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(n+\gamma)_{m+1}}\,{}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z).\quad(1.1)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p}\frac{z^p}{p!}.\qquad(1.2)$$

***Утверждение* 1.2** [17]. *Если* $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ *и* $n\ge m-1$, *то при* $n\to\infty$

$$q_m(z;F_\gamma)=e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma-1}}(1+o(1)).\qquad(1.3)$$

Доказательству теоремы 0.1 предпошлём две леммы.

***Лемма* 1.1.** *Если* $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$, $n\ge m-1$ *и*

$$\Delta(n,m,k)=\frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k}-\left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\right)^k,$$

то при произвольном m и достаточно больших n

$$\left|\Delta(n,m,k)\right|\le\frac{k}{n+m+\gamma_1+1},\qquad(1.4)$$

где $k=2,3,\ldots$, *а* $\gamma_1=Re\gamma$.

Доказательство проведём с помощью индукции по *k*. Пусть $k=2$. Тогда легко заметить, что

$$\Delta(n,m,2)=$$
$$=\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\cdot\frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)}.$$

Поэтому при произвольном *m* и достаточно больших *n*

$$\left|\Delta(n,m,2)\right|\le\frac{2}{n+m+\gamma_1+1}.$$

При $k=3$ неравенство (1.4) доказывается аналогично.

Предположим, что $k\ge 4$ и (1.4) справедливо для $k-1$ при произвольном *m*. Представим $\Delta(n,m,k)$ в виде

$$\Delta(n,m,k)=\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\cdot\left[\Delta(n,m+1,k-1)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2}\right)^{k-1}-\left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\right)^{k-1}\right]$$

С помощью формулы

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^nb+\ldots+b^{n-1})$$

преобразуем разность в квадратных скобках. В результате получим, что она равна

$$\frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)}\times$$
$$\times\sum_{p=0}^{k-2}\left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2}\right)^p\left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\right)^{k-p-2}.\qquad(1.5)$$

Отсюда и из предыдущего равенства, основываясь на предположении индукции, с учётом того, что при $k\ge 4$ и достаточно больших *n*

$$\left|\frac{m+2}{n+m+\gamma+2}\right|<\frac{11}{20},$$
$$\left|\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\right|<\frac{11}{20},$$

а сумма в (1.5) меньше 1, получаем

$$\left|\Delta(n,m,k)\right|\le\frac{m+1}{n+m+\gamma_1+1}\times$$
$$\times\left[\frac{k-1}{n+m+\gamma_1+2}+\frac{1}{n+m+\gamma_1+1}\right]\leqslant\frac{k}{n+m+\gamma_1+1}.\ \square$$

***Лемма* 1.2.** *При* $n\ge m-1$, *и* $n\to\infty$

$${}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z)=e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}(1+o(1)).\quad(1.6)$$

Доказательство. Из (1.2) следует, что

$${}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k}\frac{z^k}{k!}.$$

С другой стороны

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1}\right)^k\frac{z^k}{k!}.$$

Поэтому, так как $\Delta(n,m,0)=\Delta(n,m,1)=0$, применяя лемму 1.1, получим

$$\left|{}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z)-e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}\right|=$$
$$=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Delta(n,m,k)}{k!}z^k\right|\le\frac{1}{n+m+\gamma_1+1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|z|^k}{(k-1)!}.$$

Отсюда, в силу ограниченности модуля функции $e^{(m+1)z/(n+m+\gamma+1)}$ по совокупности параметров *n*, *m* и $z\in D$, вытекает (1.6). $\square$

Теперь для доказательства теоремы 0.1 достаточно воспользоваться утверждениями 1.1 и 1.2, легко проверяемым равенством

$$(n+\gamma)_{m+1}=\frac{(\gamma)_{n+m+1}}{(\gamma)_n}$$

и при этом учесть, что при $n\ge m-1$ и $n\to\infty$

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}=e^{\frac{mz}{n+m}}(1+o(1)),\ e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma-1}}=e^{-\frac{mz}{n+m}}(1+o(1)).$$

2 Доказательство теоремы 0.2

При достаточно больших n рассмотрим аналитическую в D функцию

$$\varphi(z) := F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma).$$

Покажем, что

$$\min_{|z|=1} |\varphi(z)| \le R_{n,m}\left(F_\gamma; D\right) \le \max_{|z|=1} |\varphi(z)|. \quad (2.1)$$

Правое неравенство в (2.1) вполне очевидно. Для доказательства левого неравенства воспользуемся следующей леммой Гончара – Дзядыка [18, лемма 3.1].

***Лемма* 2.1**. *Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на* $\overline{G}$ *функция* φ *имеет в G по крайней мере* $n+1$ *нуль с учетом кратности, то при произвольном* $m \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$R_{n,m}\left(\varphi; \overline{G}\right) \ge \min_{\partial G} |\varphi(z)|,$$

где ∂G *– граница области G.*

Из теоремы 0.1 следует, что в круге $\{z : |z| < 1\}$ с учетом кратности φ имеет $n+m+1$ нуль. Поэтому, применяя лемму 2.1, получим

$$R_{n,m}\left(F_\gamma; D\right) = \left\|F_\gamma - r^*_{n,m}\right\| = \left\|F_\gamma - \pi_{n,m} - (r^*_{n,m} - \pi_{n,m})\right\| =$$
$$= \left\|\varphi - \tilde{r}_{n+m,2m}\right\| \ge R_{n+m,2m}\left(\varphi; D\right) \ge \min_{|z|=1} |\varphi(z)|.$$

Неравенство (2.1) доказано.

Теперь для доказательства эквивалентности (0.6) достаточно заметить, что из (0.5) при $n \to \infty$ следует, что

$$\max_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \min_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \frac{m!\,|(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Соотношение (0.7) доказывается аналогично. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mittag – Leffler*, M.G. Sur la nouvelle fonction $E(x)$ / M.G. Mittag-Leffler // C.R. Akad. Sci. Paris. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.

2. *Джрбашян*, *М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.

3. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сб. – 2007. – Vol. 198, № 7. – P. 109–122.

4. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

5. *Saff*, E.B. The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function / E.B. Saff // II. Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 32. – P. 187–194.

6. *Saff*, *E.B.* On the degree of best rational approximation to the exponential function / E.B. Saff // J. Approx. Theory. – 1973. – Vol. 9, № 2. – P. 97–101.

7. *Lubinsky*, *D.S.* Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. II. / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1988. – Vol. 4. – P. 321–339.

8. *Levin*, *A.L.* Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1990. – Vol. 6. – P. 257–286.

9. *Березкина*, *Л.Л.* О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // Весці АН БССР. Сер. фіз.- матэм. навук. – 1990. – № 4. – С. 27–32.

10. *Русак*, *В.Н.* О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / В.Н. Русак, Та Хонг Куанг // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 10. – С. 868–871.

11. *Русак*, *В.Н.* Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63–92.

12. *Levin*, *A.L.* Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 293. – P. 533–545.

13. *Braess*, *D.* On the degree of best rational approximation to the exponential function / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

14. *Trefethen*, *L.N.* The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk / L.N. Trefethen // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 380–384.

15. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

16. *Van Rossum*, *H.* Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

17. *Аптекарев*, *А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\left\{{}_1F_1(1, c; \lambda_i z)\right\}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

18. *Дзядык*, *В.К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ / В.К. Дзядык // Матем. сборник. – 1979. – Т. 108 (150), № 2. – С. 247–267.

Поступила в редакцию 23.11.2020.