Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. В. БУРАКОВСКИЙ, Т. В. БОРОДИЧ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Гомель
2012

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. В. БУРАКОВСКИЙ, Т. В. БОРОДИЧ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Практическое руководство
для студентов факультета иностранных языков
и исторического факультета

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2012

УДК 51(076)
ББК 22.1 я73
Б 912

Рецензенты:
доктор физико-математических наук А. Н. Скиба;
кандидат физико-математических наук А. И. Рябченко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бураковский, В. В.

Б 912 Основы высшей математики : практ. рук-во / В. В. Бураковский, Т. В. Бородич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 44 с.

ISBN 978-985-439-695-8

В практическом руководстве рассматриваются теоретические аспекты теории вероятности : классификация событий, классическое определение вероятности, основные правила комбинаторики, геометрическая вероятность, условная вероятность, законы распределения и числовые характеристики случайных величин. Даются поясняющие примеры, задания.

Адресуется студентам факультета иностранных языков и исторического факультета.

УДК 51(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-439-695-8

Содержание

Введение

Не стоит думать, что там, где речь идет о случайных событиях, бесполезно искать какие-то закономерности – случай он и есть случай. Существует несколько групп случайных явлений, в которых закономерности уже обнаружены и изучены, оценивать и сравнивать прогноз развития событий в этом случае можно и нужно. Само понятие “вероятность” нередко определяют как количественную меру возможности реализации интересующего нас случайного события. Правда, знание вероятности благоприятного исхода – это еще не выигрыш сам по себе, это лишь взвешивание возможностей.

Мы ежедневно принимаем многие решения в условиях неопределенности. Принято различать неопределенность и риск. Риск – это когда можно сказать, что человек знает, на что он идет, шансы известны, вероятности оценены. Конечно, не всякую неопределенность можно превратить в риск. Но там, где это несложно сделать, это может оказать реальную помощь в принятии решения.

Основное направление практического руководства – теория вероятностей. В нем рассмотрены следующие темы: классификация событий, классическое определение вероятности, основные правила комбинаторики, геометрическая вероятность, условная вероятность, законы распределения и числовые характеристики случайных величин. Вместе с тем руководство имеет выраженную практическую направленность, он приспособлен для решения задач, которые встречаются в теории вероятности.

Это практическое руководство предназначено для студентов исторического и факультета иностранных языков, желающих получить базовые знания в области теории вероятностей в качестве основы для принятия решения в условиях неопределенности.

1 Элементы теории множеств. Множества и операции над ними

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Это неопределяемое понятие, его можно только описать или пояснить на примерах.

Так, можно говорить о множестве букв в латинском алфавите, множество всех книг в данной библиотеке, множестве студентов в данной группе, множестве всех точек данной линии. Под *множеством* будем понимать совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общими характерными признаками в единое целое. Чтобы задать множество, достаточно перечислить элементы или указать *характеристические* свойства элементов, т. е. такое свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они.

Определение 1.1. Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его *элементами.*

Множество принято обозначать прописными латинскими буквами, а элементы множества – строчными буквами. То, что x является элементом множества A, записывается так: $x \in A$ (x принадлежит A). Запись вида $x \notin A$ ($x \overline{\in} A$) означает, что x не принадлежит A, т. е. не является элементом множества A.

Элементы множества принято записывать в фигурных скобках. Например, если A – множество, состоящее из первых трех букв латинского алфавита, то его записывают так: $A = \{a,b,c\}$.

Множество может содержать бесконечно много элементов (множество точек прямой, множество натуральных чисел), конечное число элементов (множество школьников в классе), либо вообще не содержать ни одного элемента (множество студентов пустой аудитории).

Определение 1.2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*, обозначается $\varnothing$.

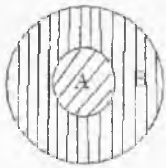

Рисунок 1.1

Определение 1.3. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит и множеству B (рисунок 1.1). Это обозначается $A \subset B$ (A – подмножество B).

Пустое множество считают подмножеством любого множества. Если множество A не является подмножеством множества B, то пишут $A \not\subset B$.

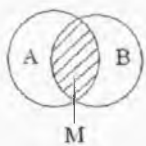

Рисунок 1.2

Определение 1.4. Два множества A и B называют *равными*, если являются подмножествами друг друга.

Обозначают $A = B$. Это означает, что если $x \in A$, то $x \in B$ и наоборот, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.

Определение 1.5. *Пересечением* множеств A и B называют множество M, элементы которого являются одновременно элементами обоих множеств A и B (рисунок 1.2). Обозначают $M = A \cap B$. Т. е. $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$.

Записывают $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$. (Вместо союза **и** – ставятся знаки $\wedge$, &).

Определение 1.6. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются* (рисунок 1.3).

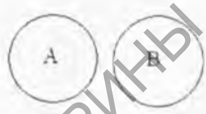

Рисунок 1.3

Аналогично можно определить пересечение 3-х, 4-х и любого конечного числа множеств.

Определение 1.7. *Объединением* множеств A и B называют множество M, элементы которого принадлежат хотя бы одному из данных множеств (рисунок 1.4). Обозначают $M = A \cup B$. Т. о. $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$. (Вместо союза **или** – ставится знак $\vee$).

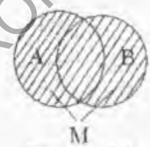

Рисунок 1.4

Аналогично определяется и множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Оно состоит из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (а может быть, и нескольким сразу).

Пример 1.1. Пусть даны два множества A и B, то пересечение $A \cap B$ и объединение $A \cup B$ будут следующие множества:

1) если $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, то $A \cap B = \{1; 3; 5\}$ и $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$;

2) если $A = \{2; 4\}$ и $B = \{3; 7\}$, то $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = \{2; 3; 4; 7\}$;

3) если A = {летние месяцы} и B = {месяцы, в которых 30 дней}, то $A \cap B$ = {июнь} и $A \cup B$ = {апрель; июнь; июль; август; сентябрь; ноябрь}.

Определение 1.8. *Натуральными* называются числа 1, 2, 3, 4, … , используемые для счета предметов.

Множество натуральных чисел N, N = {1; 2; 3; 4; …; n; …}. Оно является бесконечным, имеет наименьший элемент 1 и не имеет наибольшего элемента.

Пример 1.2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 40. Перечислить элементы этого множества. Верно ли, что $5 \in A$, $10 \in A$, $-8 \in A$, $4 \notin A$, $0 \in A$, $0 \notin A$.

◄ Множества A состоит из следующих элементов {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}. Ответ на вышеуказанные утверждения (В, В, Н, Н, Н, В), где В – верно, Н – неверно. ►

Пример 1.3. Перечислите элементы множеств, заданных характеристическими свойствами:

а) $A = \{x \mid (x-1)(2x-1)(3+x) = 0\}$, получаем $A = \{1; \frac{1}{2}; -3\}$;

б) $B = \{x \mid -1{,}1 < x < 5 \wedge x \in \mathrm{N}\}$, имеем $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Пример 1.4. Дано множество чисел $K = \{21; 54; 153; 171; 234\}$. Составить подмножество чисел из K, которые: а) делятся на 7; б) делятся на 9; в) не делятся на 5; г) делятся на 4.

◄ а) $A = \{21\}$, б) $B = \{54; 153; 171; 234\}$, в) $C = K$, г) $D = \varnothing$ ►

Пример 1.5. Множество C состоит из 11 элементов, множество D – из 8. Сколько элементов содержит $C \cap D$, $C \cup D$ содержит 15 элементов?

◄ Поскольку $\mathrm{C} + \mathrm{D} - \mathrm{C} \cup \mathrm{D} = \mathrm{C} \cap \mathrm{D}$ (рисунок 1.5), тогда $11 + 8 - 15 = 4$ ►

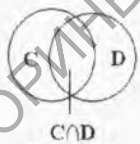

Рисунок 1.5

Определение 1.9. Разностью множеств A и B называется множество M, элементы которого принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рисунок 1.6).

Обозначают $M = A \setminus B$.

Таким образом, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

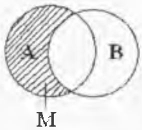

Рисунок 1.6

Пример 1.6. Если $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ и $B = \{1;\ 5\}$, то $A \setminus B = \{2; 3; 4\}$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что такое «множество»? Какие существуют способы задания множества? Приведите примеры.

2 Что называется подмножеством множества? Какие множества называются равными?

3 Что называется пересечением двух множеств? Изобразите на диаграммах пересечение множеств.

4 Что называется объединением двух множеств? Изобразите на диаграммах объединение множеств.

5 Что называется разностью двух множеств? Изобразите на диаграммах разность множеств.

6 Перечислите числовые множества и приведите их примеры.

2 Функции и способы их задания

Пусть X и Y некоторые множества.

Определение 2.1. *Функцией* называется отношение (соответствие) f между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$. Множество X называют областью определения функции и обозначают $D(f)$, а множество $\{f(x)\} \subset Y$ – областью или множеством значения функции и обозначают $E(f)$.

Определение 2.2. Переменную $x \in D(f)$ называют независимой переменной или аргументом, а $y \in E(f)$ называют зависимой переменной или функцией.

Определение 2.3. Если X и Y – числовые множества, то $y = f(x)$ называется числовой функцией.

Пример 2.1. Пусть даны два множества $X = \{2; 3; 5; 7\}$, $Y = \{15; 28; 31\}$. Установим между ними такое соответствие: элемент $x \in X$ является делителем элемента $y \in Y$. Тогда каждому элементу множества X соответствует только один элемент множества Y: $2 \to 28$; $3 \to 15$; $5 \to 15$; $7 \to 28$ (рисунок 2.1). Следовательно, задана функция.

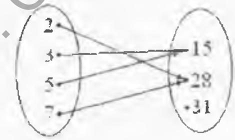

Рисунок 2.1

Существуют три основных способа задания функции: *аналитический, графический* и *табличный.*

Если указана совокупность операций, которые нужно произвести над *аргументом x*, чтобы получить значение функции, то говорят, что функция задана *аналитическим выражением.*

Примером могут служить функции $y = x^2 - 5x + 1$, $x \in [0,1]$, $y = x^2 + 7x - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Они заданы на различных множествах.

Функция может задаваться на различных числовых множествах различными аналитическими выражениями, например

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -1 \le x \le 0, \\ x+2, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Эта функция определена на отрезке [-1;1]. Для вычисления значения функции нужно выяснить, каким аналитическим выражением следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента.

Определение 2.4. Множество из n элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, для каждого из которых установлено, какой элемент является первым, вторым, и т. д. n-ным, называется *упорядоченной n-кой* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 2.5. Множество упорядоченных пар действительных чисел, т. е. $\{(x; y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, называется *числовой плоскостью*. Обозначают ее $\mathbf{R}^2$.

Способ задания функции с помощью графика на координатной плоскости называется *графическим*.

При *табличном* способе задания функции приводится таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется функцией? Дайте определение области определения, области значения функции.

2 Что называется аргументом?

3 Перечислите способы задания функций и приведите примеры.

4 Что понимается под упорядоченной n-кой?

5 Что называется числовой плоскостью?

3 Предмет и задачи теории вероятностей. События и операции над ними. Относительные частоты и их свойства

3.1. Предмет и задачи теории вероятности

Возникновение теории вероятностей относят к XVII веку и связывают с решением комбинаторных задач теории азартных игр и потребностями страхового дела. Азартные игры (карты, кости) дали стимул для построения математических моделей игровых ситуаций. Эти модели предоставляли игроку возможность ориентироваться в ходе игры, делать расчеты ставок, оценивать шансы выигрыша, а также позволяли планировать расходы и доходы страховых компаний и т. д.

Разработкой таких моделей занимались в 17 веке Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс. Основы классической теории вероятности были сформулированы в 18 веке Я. Бернулли, П. Лапласом, С. Пуассоном, К. Гауссом. В 1933 году А. Н. Колмогоров сформулировал аксиомы теории вероятности, базирующиеся на теории множеств.

Однако с теорией вероятностей развивалась и другая современная дисциплина – математическая статистика, которая широко применяется в экономике, технике, социологии, медицине, физике, лингвистическом программировании и др.

Определение 3.1. *Предметом теории вероятностей* является количественный и качественный анализ математических моделей вероятностных экспериментов, называемый статистической обработкой экспериментальных данных.

Вероятностные эксперименты имеют следующие общие черты: непредвиденность результата; наличие определенных количественных закономерностей при их многократном повторении при одинаковых условиях; множество возможных исходов.

Определение 3.2. *Вероятностными* называют эксперименты, которые можно повторить произвольное число раз при соблюдении одних и тех же стабильных условий, однако их исходы неоднозначны, случайны.

Определение 3.3. *Теория вероятностей* – наука, занимающаяся анализом математических моделей для принятия решений в условиях неопределенности.

Первичным понятием теории вероятности, не определенным через другие понятия, является *пространство элементарных исходов* Ω.

Обычно в качестве пространства элементарных исходов берутся единственно возможные неразложимые результаты эксперимента.

Пример 3.1. Приведем примеры пространств элементарных исходов:

1) при бросании симметричной монеты в качестве Ω выбирается $\Omega = \{г, р\}$, где г – герб, р – решка;

2) при бросании игральной кости пространство элементарных исходов следующее $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

3) при бросании двух симметричных монет $\Omega = \{(р, р), (р, г), (г, р), (г, г)\}$;

4) при бросании двух игральных костей $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$, n = 36;

5) пусть на [AB] наудачу бросается точка (рисунок 3.1) $\Omega = \{\omega \mid \omega \in [AB]\} = [AB]$;

6) пусть на [AB] наудачу бросаются две точки (рисунок 3.2) $\Omega = \{(x, y) \mid x \in [AB], y \in [AB]\} = [AB] \times [AB]$.

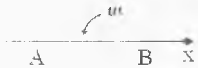

Рисунок 3.1

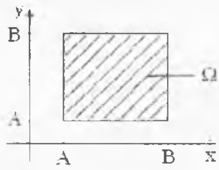

Рисунок 3.2

Определение 3.4. *Опытом* или *испытанием* называют всякое осуществление определённого комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называют *событием*, т. е. *событием* называется произвольное подмножество A пространства элементарных исходов Ω.

Пример 3.2. Опытом является подбрасывание монеты, а событиями – выпадение “герба”, “цифры” на верхней ее стороне (когда монета упадет). Опытами являются стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т. п.

События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C*.

Определение 3.5. Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется *элементарным исходом* (*элементарным событием*, или *шансом*).

Определение 3.6. Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами*, т. е. те элементарные исходы, из которых состоит событие A, называются *благоприятствующими* событию A.

Пример 3.3. Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы A_1, A_3, A_5 являются благоприятствующими событию "выпало нечетно число очков".

Говорят, что событие A произошло, если в результате эксперимента происходит элементарный исход, благоприятствующий событию A, т. е. $\omega \in A$.

Определение 3.7. Событие называется *достоверным*, в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте, т. е. все пространство элементарных исходов Ω, если его взять в качестве события, называют *достоверным* событием, поскольку оно происходит в любом эксперименте (всегда).

Пример 3.4. Если в ящике только голубые шары, то событие "из ящика извлечен голубой шар" является достоверным (в ящике нет шаров другого цвета).

Определение 3.8. Событие называется *невозможным*, в данном опыте, если оно не может произойти в этом опыте.

Пустое множество $\varnothing$ (т. е. множество, не содержащее ни одного элементарного исхода) называется *невозможным* событием, поскольку оно никогда не произойдет.

Пример 3.5. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие "из ящика извлечен голубой шар" является невозможным (таких шаров в ящике нет).

Определение 3.9. Событие называется *случайным* в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в этом опыте, т. е. все остальные события, кроме достоверного и невозможного, называются *случайными*.

Пример 3.6. Если в ящике находятся n голубых и m красных шаров, одинаковых по размеру и весу, то событие "из урны извлечен голубой шар" является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только голубые, но и красные шары). Случайными событиями являются "герб и цифра на верхней стороне монеты при ее подбрасывании", "попадание и промах при стрельбе по мишени", "выигрыш по билету лотереи" и т. п.

Замечание 3.1. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что одно и то же событие в некотором опыте может быть достоверным, в другом – невозможным, в третьем – случайным. Говоря о достоверности, невозможности, случайности события, имеют в виду его достоверность, невозможность, случайность по отношению к конкретному опыту, т. е. к наличию определенного комплекса условий или действий.

Определение 3.10. Два события называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте.

Пример 3.7. Так, при подбрасывании двух симметричных монет, событие A – “герб на верхней стороне первой монеты” и B – “цифра на верхней стороне второй монеты” являются совместными.

3.2. Операции над событиями

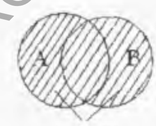

Рисунок 3.3

Определение 3.11. *Суммой* событий A и B называют объединение этих множеств $A \cup B$ (рисунок 3.3).

Обозначают $A + B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$.

Вместо союза **или** – ставится знак $\vee$.

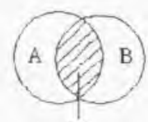

Рисунок 3.4

Определение 3.12. *Произведением* событий A и B называют пересечение множеств $A \cap B$ (рисунок 3.4).

Обозначают $AB = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$.

Вместо союза **и** – ставятся знаки $\wedge$, &.

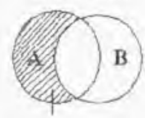

Рисунок 3.5

Определение 3.13. *Разностью* событий A и B называют разность множеств $A \setminus B$ (рисунок 3.5).

Обозначают $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

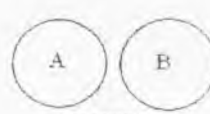

Рисунок 3.6

Определение 3.14. Два события называются *несовместными (несовместимыми)*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании (рисунок 3.6), т. е. события A и B называются *несовместимыми,* если AB = Ø.

Если AB = Ø, то будем говорить, что $A \cup B = A + B$.

Так, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Несколько событий называются несовместными, если они попарно несовместны.

Рисунок 3.7

Определение 3.15. Говорят, что событие A *влечет* событие B, если $A \subset B$ (рисунок 3.7).

Определение 3.16. Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого (рисунок 3.8). Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\bar{A}$. Таким образом, событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется *противоположным* к событию A.

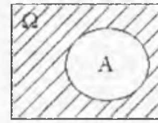

Рисунок 3.8

Пример 3.8. Приведем примеры противоположных событий данному событию:

1) так, противоположными являются события “герб” и “цифра” при одном подбрасывании симметричной монеты;

2) если A – “попадание”, то $\bar{A}$ – “промах” при одном выстреле по мишени;

3) при бросании игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Если A – выпадение нечетного числа очков, т. е. $A = \{1, 3, 5\}$, то выпадение четного числа очков $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ является противоположным событием.

Определение 3.17. Множество событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют *полной группой событий*, если они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием (рисунок 3.9). Таким образом, события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если

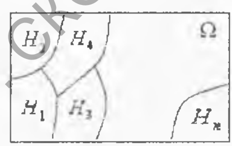

Рисунок 3.9

$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ (т. е. $H_i H_j = \varnothing$, если $i \neq j$).

В частности события A и $\bar{A}$ образуют полную группу, т. к. $A + \bar{A} = \Omega$.

Пример 3.9. Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т. е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: “верхней гранью оказалась грань с цифрой k” обозначим через A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). События $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ образуют полную группу: они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием (когда кубик упадет, то только одна из граней окажется верхней, на ней написана только одна цифра от 1 до 6).

Определение 3.18. События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Пример 3.10. При подбрасывании монеты событие A (появление цифры) и событие B (появление герба) равновозможные, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не влияет на то, какая сторона монеты (герб или цифра) окажется верхней. При подбрасывании игрального кубика события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ являются равновозможными, поскольку предполагается, что кубик изготовлен из однородного материала, имеет правильную форму и наличие цифр (или очков) на гранях не влияет на то, какая из шести граней окажется верхней.

3.3. Относительные частоты и их свойства

Пусть производится некоторый случайный (вероятностный) эксперимент, пространством элементарных исходов является множество Ω. Рассмотрим некоторое событие A ($A \subseteq \Omega$). Если эксперимент произвести N раз, а событие A появится в них $N(A)$ раз, то число $W(A)=\frac{N(A)}{N}$ называется *относительной частотой появления события A*.

Свойство 3.1. Относительная частота произвольного события неотрицательна, т. е. $\forall\ A \subseteq \Omega,\ W(A) \geq 0$.

Свойство 3.2. Относительная частота достоверного события равна единице.

$$W(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Свойство 3.3. (*аддитивности*). Относительная частота суммы несовместных событий равна сумме относительных частот этих событий.

$$W(A+B)= \frac{N(A+B)}{N} = \frac{N(A)+N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N} = W(A)+W(B).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что изучает теория вероятностей?

2 Приведите пример пространств элементарных исходов.

3 Что такое опыт?

4 Что понимается под терминами элементарный исход и благоприятствующий исход?

5 Какое событие называется достоверным? Приведите примеры.

6 Какое событие называется невозможным? Приведите примеры.

7 Какое событие называется случайным? Приведите примеры.

8 Какие события называются совместными? Приведите примеры.

9 Что называется суммой двух событий? Изобразите на диаграммах сумму событий.

10 Что называется произведением двух событий? Изобразите на диаграммах произведение событий.

11 Что называется разностью двух событий? Изобразите на диаграммах разность событий.

12 Какие события называются несовместными?

13 Какие события называются противоположными? Приведите примеры.

14 Дайте определение полной группы событий. Приведите примеры.

15 Какие события называются равновозможными? Приведите примеры.

4 Аксиомы теории вероятностей. Дискретные пространства элементарных исходов. Классическое определение вероятности

Пусть Ω пространство элементарных исходов, F – множество всех подмножеств Ω. Любому событию $A \in$ F ставится в соответствие действительное число $P(A)$, называемое *вероятностью события A*, при этом выполняются аксиомы теории вероятности:

Аксиома 4.1. Вероятность произвольного события неотрицательна, т. е. $\forall\ A \in$ F, $P(A) \geq 0$.

Аксиома 4.2. Вероятность достоверного события равна 1, т. е.

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксиома 4.3. (*счетной аддитивности*) Если $A_1, A_2, \ldots \in$ F и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \text{ или}$$

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Определение 4.1. Бесконечное множество называется *счетным*, если элементы этого множества можно занумеровать натуральными числами.

Все другие множества называются *несчетными* (например, множество точек $[a, b]$ ненулевой длины).

Определение 4.2. Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если оно конечное или счетное, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

Любому элементарному исходу ω_i ставится в соответствие число $p(\omega_i)$, так что при этом $\sum\limits_{\{\omega_i \mid \omega_i \in \Omega\}} p(\omega_i) = 1$.

Определение 4.3. *Вероятностью события A* называется число $P(A) = \sum\limits_{\{\omega_i \mid \omega_i \in A\}} p(\omega_i)$.

Пример 4.1. Бросается игральная кость. Найти вероятность выпадения нечетного числа очков.

◄ Поскольку $p(\omega_i) = \frac{1}{6}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, то вероятность выпадения нечетного числа равна $P(A) = p(\omega_1, \omega_3, \omega_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. ►

Сформулируем следующие предположения:

1. Пространство элементарных исходов конечно: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

2. Все элементарные исходы равновероятны (равновозможные), т. е. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n)$.

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$, то $p(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим некоторое событие $A \subseteq \Omega$, состоящее из k элементарных исходов, $k < n$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$.

Вероятность события $P(A) = \sum_{l=1}^{k} p(\omega_{i_l}) = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Определение 4.4. (классическое определение вероятности). Если пространство элементарных исходов конечно, а все элементарные исходы равновероятны, то *вероятность события* A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу всех возможных элементарных исходов $P(A) = \frac{k}{n}$.

Пример 4.2. Бросается две монеты. Найти вероятность того, что хотя бы на одной выпадет герб.

◄ Пространство элементарных исходов Ω = {(г, г), (г, р), (р, г), (р, р)}, число его элементов n=4. Благоприятные исходы – A = {(г, г), (г, р), (р, г)}, их число – k = 3.

Таким образом, вероятность $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{4}$. ►

Пример 4.3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

◄ Пространство элементарных исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, .., 6\}\}$, число его элементов n = 36. Благоприятные исходы – A = { (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 5), (2, 5), (1, 6)}, их число – k = 6.

Таким образом, вероятность $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ►

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключаются аксиомы теории вероятностей?
2 Какое множество называется счетным? Приведите примеры.
3 Какое множество называется несчетным? Приведите примеры.
4 Дайте определение дискретного пространства элементарных исходов.
5 Сформулируйте классическое определение вероятности.

5 Основные правила комбинаторики. Выборки, сочетания

Лемма 5.1. Из m элементов $a_1,\ldots,a_n$ первой группы и n элементов $b_1,\ldots,b_n$ второй группы можно составить ровно $m \cdot n$ упорядоченных пар вида (a_i, b_j), содержащих по одному элементу из каждой группы.

◄ $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n)$,
$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n)$, m строк
… … … … … … ...
$(a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n)$.
n столбцов

Всего $m \cdot n$ пар. ►

Пример 5.1. В колоде карт 4 масти (черва, пика, трефа, бубна), в каждой масти по 9 карт или по 13 карт, тогда по лемме 5.1 в колоде либо $n = 4 \cdot 9 = 36$ карт, либо $n = 4 \cdot 13 = 52$ карты.

Лемма 5.2. Из n_1 элементов первой группы $a_1, a_2,\ldots, a_{n_1}$,
n_2 элементов второй группы $b_1, b_2,\ldots, b_{n_2}$,
и т. д. … … … … … … … …
n_k элементов k-той группы $x_1, x_2,\ldots, x_{n_k}$,
можно составить ровно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ различных упорядоченных комбинаций вида $(a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, x_{j_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы.

Пример 5.2. При бросании двух игральных костей число различных упорядоченных комбинаций по лемме 5.2. следующее: $n = 6^2 = 36$; при бросании трех костей – $n = 6^3 = 216$.

Леммы 5.1 и 5.2 называются *основными правилами комбинаторики.*

Пусть имеется множество из n элементов $\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$. Будем рассматривать выборки объёма k вида $(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k})$ из n элементов. Все выборки можно классифицировать по двум признакам:

1) упорядоченные и неупорядоченные;

2) с возвращением и без возвращения.

Если выборки считаются упорядоченными, то играет роль порядок элементов в выборке. Если же выборка неупорядоченная, то все выборки с одним и тем же составом элементов отождествляются.

Пример 5.3. Рассмотрим множество, состоящее из трёх элементов $\{1, 2, 3\}$. Составим таблицу числа выборок объёма $k = 2$ из трёх элементов.

Таблица 5.1 – Таблица числа выборок объёма 2 из трёх элементов

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
с возвращением	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 2), (2, 3) (3, 1), (3, 2), (3, 3)	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3) (3, 3)
без возвращения	(1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 3) (3, 1), (3, 2)	(1, 2), (1, 3) (2, 3)

Таблица 5.1 – Общая таблица числа выборок объёма k из n элементов

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
с возвращением	n^k	C^k_{n+k-1}
без возвращения	A^k_n	C^k_n

Определение 5.1. Упорядоченная выборка без возвращения называется *размещением.*

Число размещений $A^k_n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 5.4. В лифт 12-этажного дома зашли 3 человека. Найти вероятность того, что все вышли на разных этажах.

◀ Опишем пространство элементарных исходов: $\Omega = \{(i_1,\ i_2,\ i_3) \mid i_1,\ i_2,\ i_3 \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ 12\}\}$, $\{\ i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3\}$ – дополнительное условие для события A. Пространство Ω – упорядоченная выборка с возвращением, число ее элементов $n = 11^3$. Число благоприятствующих исходов $k = A^3_{11} = \dfrac{11!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11$. По классическому определению вероятности $\mathrm{P(A)} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11}{11^3} = \dfrac{90}{11^2} = \dfrac{90}{121}$. ▶

Определение 5.2. *Перестановкой* из k элементов называется совокупность этих же элементов, записанных в произвольном порядке. Число перестановок из k элементов $P_k = k!$ $(0! = 1)$.

Определение 5.3. *Перестановкой с повторениями* из k элементов называют такую перестановку, в которой некоторые элементы повторяются. Пусть среди k элементов есть k_1 элемент одного вида, k_2 элементов другого вида и т. д., тогда число перестановок с повторениями определяется формулой $P_k(k_1,\ k_1, \ldots,\ k_l) = \dfrac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$.

Определение 5.4. Произвольное k-элементное подмножество множества, состоящего из n элементов, называется *сочетанием* из n элементов по k элементам.

Обозначается число сочетаний из n элементов по k элементам через

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Свойства сочетаний:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойства симметрии);
4) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ (рекуррентное соотношение);
5) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (следствие биноминальной формулы Ньютона).

При решении задач комбинаторики используются следующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов n способами, а другой объект B может быть выбран m способами, то выбрать либо A, либо B можно $n+m$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов n способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран m способами, то пара (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $n \cdot m$ способами.

Классическая схема подсчета вероятностей (схема урн): в урне имеется N шаров, из них M зеленых, $(N–M)$ красных. Из урны, содержащей N шаров, в которой находится M зеленых шаров, извлекается n шаров. Требуется определить вероятность того, что в выборке объема n будет обнаружено m голубых шаров. Обозначим через A событие «в выборке объема n имеется m голубых шаров», тогда

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{M,N}(m,n).$$

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключаются основные правила комбинаторики?
2 Как классифицируются выборки?
3 Что такое размещение и как оно вычисляется?
4 Что такое перестановка и как она вычисляется?
5 Что такое перестановка с повторением и как она вычисляется?

6 Что такое сочетание и как оно вычисляется?
7 Перечислите свойства сочетания.
8 Сформулируйте правило суммы.
9 Какие особенности правила произведения?
10 В чем заключается классическая схема подсчета вероятностей?

6 Геометрические вероятности

6.1. Геометрическая вероятность на прямой

Пусть на числовой оси имеется отрезок $[a, b]$ и на него наудачу бросается точка (рисунок 6.1). Вероятность того, что эта точка попадёт на $[c, d] \subset [a, b]$, вычисляется по формуле:

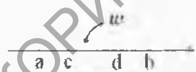

Рисунок 6.1

$$P\{\omega \in [c, d]\} = \frac{d-c}{b-a}$$ – *геометрическая вероятность на прямой.*

6.2. Геометрическая вероятность на плоскости

Пусть на плоскости фигура g составляет часть фигуры G. Вероятность того, что наудачу брошенная в фигуру G точка попадёт в фигуру $g \subset G$ находится по формуле:

$$P\{\omega \in g\} = \frac{S_g}{S_G}$$ – *геометрическая вероятность на плоскости.*

Здесь S_g и S_G – площади фигур g и G соответственно.

6.3. Геометрическая вероятность в пространстве

Пусть в пространстве ($\mathbf{R}^3$) имеется фигура d, составляющая часть фигуры D. Вероятность того, что наудачу брошенная в фигуру D точка попадёт в фигуру d, определяется по формуле:

$$P\{\omega \in d\} = \frac{V_d}{V_D}$$ – *геометрическая вероятность в пространстве.*

Здесь V_d и V_D – объёмы фигур d и D соответственно.

Замечание 6.1. Геометрические вероятности позволяют устранить недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом элементарных исходов.

Пример 6.2. (*задача о встрече*) Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 1 ч дня. Пришедший первым ждёт второго ¼ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если между 12 и 1 ч дня каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода.

◄ Пусть x – момент прихода первого студента (необязательно, чтобы он пришёл первым), а y – момент прихода второго. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{(x, y)|\ x, y \in [0,1]\}$, а элементарные исходы благоприятные событию A следующие $A = \{(x, y)|\ |x - y| < \frac{1}{4}\}$.

На рисунке 6.2 показано пространство элементарных исходов Ω и благоприятные исходы событию A.

1) $x \geq y, x - y = \frac{1}{4},\ y = x - \frac{1}{4}$;

2) $x < y, y - x = \frac{1}{4},\ y = x + \frac{1}{4}$;

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{S_{кв} - 2S_{тр}}{S_{кв}} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1} = \frac{7}{16}. ►$$

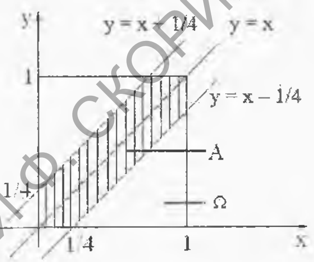

Рисунок 6.2

Вопросы для самоконтроля

1 Как находится геометрическая вероятность на прямой?
2 Как находится геометрическая вероятность на плоскости?
3 Как находится геометрическая вероятность в пространстве?
4 В чем заключается преимущество геометрической вероятности?
5 Сформулируйте задачу «о встрече».

7 Свойства вероятности

Свойство 7.1. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Свойство 7.2. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

Свойство 7.3. Для любого события A верно, что

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

◀ $P(A) = \frac{n_A}{n}$. Т. к. $0 \le n_A \le n$, то $0 \le \frac{n_A}{n} \le 1$, следовательно $0 \le P(A) \le 1$. ▶

Свойство 7.4. (*теорема сложения вероятностей*) Если события A и B несовместимы, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

◀ $P(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B)$. ▶

Свойство 7.5. (*обобщённая теорема сложения вероятностей*)

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(AB).$$

◀$P(A \cup B) = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B - n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{AB}}{n} =$
$= P(A) + P(B) - P(AB)$ (рисунок 7.1). ▶

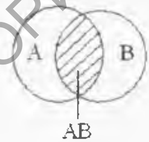

Рисунок 7.1

Свойство 7.6. (*теорема сложения k слагаемых*) Если события $A_1, A_2, ..., A_k$ попарно несовместимы, то

$$P(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Свойство 7.7. Если событие A влечёт B ($A \subset B$), то

$$P(A) \le P(B).$$

◀ $B = A + (B\backslash A)$, $P(B) = P(A) + P(B\backslash A) \ge P(A)$ (рисунок 7.2). ▶

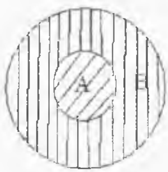

Рисунок 7.2

Свойство 7.8. Если событие A влечёт B ($A \subset B$), то

$$P(B\backslash A) = P(B) - P(A).$$

◀Из предыдущего свойства. ▶

Свойство 7.9. Вероятность события, противоположного событию A, вычисляется по формуле:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A), \text{ где } A + \bar{A} = \Omega.$$

◀ $\bar{A} = \Omega\backslash A$, $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$, т. к. $A \subset \Omega$. ▶

Свойство 7.10. Если события $H_1, H_2, ..., H_k$ образуют полную группу, то

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_k) = 1.$$

◀ По определению полной группы $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$, тогда по свойству 7.6 справедливо, что $P(\sum_{i=1}^{k} H_i) = (\sum_{i=1}^{k} P(H_i)) = P(\Omega) = 1$. ▶

Вопросы для самоконтроля

1 Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?
2 В каких пределах изменяется значение вероятности?
3 Сформулируйте теорему сложения вероятностей.
4 В чем заключается обобщенная теорема сложения вероятностей?
5 Сформулируйте теорему сложения k слагаемых.
6 Какими свойствами обладают вероятности, если одно событие влечет другое?
7 Чему равна сумма вероятностей событий образующих полную группу?

8 Условная вероятность. Независимость

Определение 8.1. *Условной вероятностью* события B при условии A называется вероятность события B в предположении, что событие A наступило.

Обозначение: $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}_A(B)$. Находится по формуле:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{8.1}$$

Теорема 8.1. (*умножение вероятностей*) Если события A и B *зависимы*, то вероятность их произведения находится по формуле:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B).$$

◄ Следует из формулы (8.1). ►

Теорема 8.2. (*обобщённая теорема умножения вероятностей*) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные события, тогда вероятность их произведения находится по формуле:

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

◄ $\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})\,\mathrm{P}(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$
$= \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_{n-2})\,\mathrm{P}(A_{n-1}|A_1 A_2 \ldots A_{n-2})\,\mathrm{P}(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) = \ldots =$
$= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$. ►

Пример 8.1. Студент знает 20 вопросов из 25. Преподаватель задаёт 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все 3 вопроса.

◄ Обозначим через A – студент знает все 3 вопроса, A_1 – знает первый вопрос, A_2 – знает второй вопрос, A_3 – знает третий вопрос.

$A = A_1 A_2 A_3$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 A_2 A_3) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2| A_1)\,\mathrm{P}(A_3| A_1 A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} < \frac{1}{2}$. ►

Теорема 8.3. Если события A и B *независемы*, то вероятность их произведения находится по формуле:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие 8.1. События A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

◄ Пусть события A и B независимы, т. е. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, тогда $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$.

Если $P(B|A) = P(B)$, то $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$, откуда $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. ►

Определение 8.2. (*независимости в совокупности*) События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми* (*или независимыми в совокупности*), если:

1) $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – попарно независимы;

2) $P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – независимы по три, и т. д. ……;

2) $(n-1)$ $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$.

Замечание 8.1. Из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение условной вероятности. По какой формуле находится условная вероятность?

2 Чему равна вероятность двух зависимых событий?

3 Сформулируйте обобщенную теорему умножения вероятностей?

4 Как находится вероятность от произведения двух независимых событий?

5 В чем заключается независимость событий в совокупности?

9 Формулы полной вероятности и Байеса

Теорема 9.1. (*формула полной вероятности*) Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то вероятность появления события A, которое может произойти совместно с любым из событий H_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, находится по формуле:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) \text{ или}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

◄ Поскольку события образуют полную группу, тогда $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$. Событие A происходит только с одним из событий H_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, поэтому $A \cdot \Omega = A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$. По теореме сложения вероятностей

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(A \cdot H_1) + \ldots + \mathrm{P}(A \cdot H_n) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \ldots + \mathrm{P}(H_n)\mathrm{P}(A|H_1).$$ ►

Пример 9.1. Имеются две урны. В первой – 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 4 белых и 3 чёрных. Из 1-й урны наудачу взят 1 шар и переложен во 2-ю урну. После этого из 2-й урны извлечён наудачу шар. Какова вероятность того, что он белый?

◄ A – из 2-й урны извлечён белый шар,

H_1 – из 1-й урны во 2-ю переложен белый шар,

H_2 – из 1-й урны во 2-ю переложен чёрный шар, $H_1 + H_2 = \Omega$.

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{35}{64}.$$ ►

Замечание 9.1. При применении формулы полной вероятности события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующие полную группу, называются *гипотезами.*

Теорема 9.2. (*формула Байеса*) Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, A – некоторое событие, которое может произойти совместно с любым из событий H_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда условная вероятность:

$$\mathrm{P}(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \; j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

◄ $$\mathrm{P}(H_j|A) = \frac{P(H_j A)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}.$$ ►

Пример 9.2. Рассмотрим предыдущий пример с учётом того, что из 2-й урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что из 1-й урны во 2-ю переложили белый шар.

◄ $$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{35}{64}} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$ ►

Замечание 9.2. В формуле Байеса вероятности $\mathrm{P}(H_i)$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются *априорными вероятностями гипотез* (от латинского *a priori*, что означает "сперва", т. е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $\mathrm{P}(H_i|A)$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) тех же событий называются *апостериорными вероятностями гипотез*,(от латинского слова *a posteriori*, что означает " после ", т. е. в данном случае после опыта).

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте формулу полной вероятности?

2 Укажите, какие события в формуле полной вероятности называются гипотезами.

3 Сформулируйте формулу Байеса?

4 Укажите, какие события в формуле Байеса называются априорными вероятностями гипотез.

5 Укажите, какие события в формуле Байеса называются апостериорными вероятностями гипотез.

10 Схема независимых испытаний Бернулли. Полиноминальное распределение

10.1. Схема независимых испытаний Бернулли

Предположим, что производятся независимо друг от друга n испытаний, в каждом из которых возможны только 2 исхода: успех и неудача ("У", "Н"). Причём вероятность успеха Р(У) = p, неудачи – Р(Н) = q и справедливо равенство $p + q = 1$.

Определение 10.1. Последовательность n испытаний называется *испытаниями Бернулли*, если эти испытания независимы, в каждом из них возможны 2 исхода, причём вероятности этих исходов не меняются от испытания к испытанию.

В n испытаниях Бернулли элементарным исходом является:
$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_i \in \{У, Н\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Всего таких исходов 2^n. Поскольку испытания независимы, то:
$P(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = P(\omega_1)P(\omega_2)\ldots P(\omega_n)$.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что в n испытаниях Бернулли произошло ровно k успехов. Тогда
$P_n(k) = P\{(У, \ldots, У, Н, \ldots, Н),(У, \ldots, У, Н, У, Н, \ldots, Н), \ldots, (Н, \ldots, Н, У, \ldots, У)\} = p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Таким образом, получим

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} - \textit{формула Бернулли,}$$

где $k \in \{0, \ldots, n\}$, $p + q = 1$.

Пример 10.1. Двое равных по силам шахматистов играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две из четырёх? Ничьи во внимание не принимаются.

◀ $p = q = \frac{1}{2}$, $P_2(1) = C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$;

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8};$$

Таким образом, $P_2(1) > P_4(2)$. ▶

10.2. Полиномиальное распределение

Предположим, что производится независимо друг от друга n испытаний, в каждом из которых возможны k исходов $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Вероятность этих исходов обозначим $P(E_i) = p_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Причём $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $k > 2$. Вероятность того, что в n испытаниях исход E_1 появится r_1 раз, $E_2 - r_2$ раз, и т. д. $E_k - r_k$ раз, где $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, находится по формуле:

$$P(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$$ – *формула полиномиального распределения,*

где $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

Замечание 10.1. Формула полиномиального распределения обобщает формулу Бернулли на случай более 2 исходов в каждом испытании.

Пример 10.2. В урне 3 шара: белый, красный, синий. Из урны 5 раз наудачу извлекаются шары с возвращением. Найти вероятность того, что белый шар извлечён 3 раза, а красный и синий – по одному разу.

◀ Поскольку $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$; $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, тогда

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 20 \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{20}{3^5} = \frac{20}{243}.$$ ▶

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключается испытание Бернулли?

2 По какой формуле вычисляются испытания Бернулли?

3 В чем заключается полиномиальное распределение?

4 По какой формуле вычисляется полиномиальное распределение?

5 Как связаны формула Бернулли и формула полиномиального распределения?

11 Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 11.1. (*Пуассона*) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А наступает с вероятностью p, а также, если число испытаний неограниченно возрастает, а $p \to 0$, причём $n \cdot p = a$ – величина постоянная, тогда

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

◀ По формуле Бернулли вероятность того, что событие появится ровно k раз в n независимых испытаниях
$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
Отсюда

$$\mathrm{P}_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

По условию $a = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{a}{n}$, подставляя, получим:

$$\mathrm{P}_n(k) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^{-a}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}\left[\text{т. к. } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\right].$$ ▶

Замечание 11.1. Теоремой Пуассона удобно пользоваться, когда $p \to 0$, причём $a = n \cdot p \le 10$. Существуют специальные таблицы, в которых приведены значения вероятностей для различных параметров a и k.

Формула Бернулли удобна, когда значение n не очень велико. В противном случае используют приближенные формулы из теорем Муавра-Лапласа.

Теорема 11.2. (*локальная теорема Муавра-Лапласа*) Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, т. е. $0 < p < 1$, то вероятность того, что событие A появится ровно k раз в n независимых испытаниях

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – малая функция Лапласа, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Имеются специальные таблицы значений функции $\varphi(x)$. Нужно учитывать, что функция $\varphi(x)$ – чётная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Теорема 11.3. (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*) Если вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от отлична от 0 и 1, т. е. $0 < p < 1$, то вероятность того, что событие A появится от k_1 до k_2 раз в n независимых испытаниях, определятся выражением:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функция Лапласа – нечётная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Значения находят по таблице.

Пример 11.1. Пусть вероятность события A в каждом отдельном испытании $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A появится 75 раз в 100 независимых испытаниях.

◄ По локальной теореме Муавра-Лапласа $x = \frac{75 - 100 * 0{,}8}{\sqrt{100 * 0{,}8 * 0{,}2}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$. Значение $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$ находится по таблице.
Тогда вероятность

$P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{100 * 0{,}8 * 0{,}2}} \cdot 0{,}1826 \approx 0{,}04565$. ►

Пример 11.2. Вероятность $P(A)$ появления события A в одном испытании равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A появится более 69 раз в 100 независимых испытаниях.

◄ $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$.

По интегральной теореме Муавра-Лапласа $x_1 = \frac{70 - 100 * 0{,}8}{\sqrt{100 * 0.8 * 0.2}} = -\frac{10}{4} = -1{,}25$,

$x_2 = \frac{100 - 100 * 0{,}8}{\sqrt{100 * 0{,}8 * 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5$. По таблице $\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$, $\Phi(5) = 0{,}5$, $P_{100}(70, 100) \approx \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938$. ►

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Пуассона.
2 В каком случае необходимо пользоваться теоремой Пуассона?
3 В чем заключается локальная теорема Муавра-Лапласа?
4 В чем заключается интегральная теорема Муавра-Лапласа?
5 Как находятся функции Лапласа?

12 Случайные величины. Свойства функции распределения

12.1. Случайные величины

Определение 12.1. *Случайной величиной* X называется функция X(ω), отображающая пространство элементарных исходов Ω во множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Т. о. $X(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}$.

Пример 12.1. Дважды подбрасывается монета. Рассмотрим случайную величину X – число выпадений герба, определённую на пространстве элементарных исходов Ω = {(г, г), (г, р), (р, г),(р, р)}. Множество возможных значений случайной величины X - {0, 1, 2}. Составим таблицу

ω	(г, г)	(г, р)	(р, г)	(р, р)
X(ω)	2	1	1	0

Одной из важнейших характеристик случайной величины является её функция распределения.

Определение 12.2. *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x) = F_X(x)$ действительной переменной x, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет в результате эксперимента значение, меньшее некоторого фиксированного числа x

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X \in (-\infty; x)\}.$$

Замечание 12.1. Если рассматривать случайную величину X как случайную точку на оси Оx, то функция распределения F(x) с геометрической точки зрения – это вероятность того, что случайная точка X в результате реализации эксперимента попадёт левее точки x (рисунок 12.1).

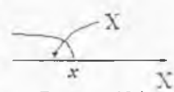

Рисунок 12.1

12.2 Свойства функции распределения

Свойство 12.1. Функция распределения F(x) – неубывающая функция, т. е.для $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется условие F(x) ≤ F(x).

◄ Поскольку $x_1 < x_2$, то события $\{X < x_2\}=\{X < x_1\}+\{x_1 \le X < x_2\}$ (рисунок 12.2), по определению функции распределения $F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \le X < x_2\}$.

Т. к. $P\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0$, тогда $F(x_2) > F(x_1)$. ►

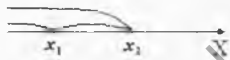

Рисунок 12.2

Свойство 12.2. Для $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 < x_2$ справедливо равенство $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

Замечание 12.2. Если функция распределения F(x) – непрерывная, то свойство 12.2 выполняется и при замене знаков ≤ и < на < и ≤.

Свойство 12.3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

◄ F(-∞) = P{X < -∞} = P(∅) = 0, F(+∞) = P{X < +∞} = P(Ω) = 1. ►

Свойство 12.4. Функция распределения F(x) непрерывна слева ($\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$).

Свойство 12.5. P{$X \ge x$} = 1 - F(x).

◄{X < +∞} = {X < x} + {$X \ge x$} (рисунок 12.3), по свойству вероятности P{X < +∞} = P{X < x} + P{$X \ge x$}; P(Ω) = 1 = F(x) + P{$X \ge x$}, откуда P{$X \ge x$} = 1 - F(x). ►

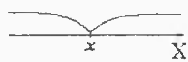

Рисунок12.3

Вопросы для самоконтроля

1 Что такое случайная величина?

2 Что называется функцией распределения?

3 Что означает с геометрической точки зрения функция распределения?

4 Сформулируйте свойства функции распределения.

5 Как записывается на языке кванторов, что функция распределения неубывающая?

6 Чему равняется функция распределения на бесконечности?

13 Дискретные случайные величины

Определение 13.1. Случайная величина X называется *дискретной*, если она принимает конечное либо счётное число значений.

Определение 13.2. *Законом распределения случайной величины X* называется совокупность пар чисел (x_i, p_i), где x_i – возможные значения случайной величины, а p_i – вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения, т. е. $p_i = P\{X = x_i\}$, причём $\sum_i p_i = 1$.

Простейшей формой задания дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности. Такая таблица называется *рядом распределения* дискретной случайной величины.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Ряд распределения можно изобразить графически. В этом случае по оси абсцисс откладывается x_i, по оси ординат – вероятность p_i. Точки с координатами (x_i, p_i) соединяют отрезками и получают ломаную, называемую *многоугольником распределения*, который является одной из форм задания закона распределения дискретной случайной величины.

Пример 13.1. Построить многоугольник распределения (рисунок 13.1) случайной величины X с рядом распределения

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,2	0,4

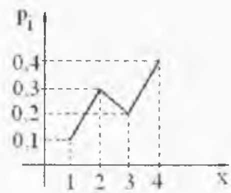

Рисунок 13.1

Определение 13.3. Говорят, что дискретная случайная величина X имеет *биноминальное распределение* с параметрами (n, p) если она может принимать целые неотрицательные значения $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с вероятностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	k	…	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	…	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	…	p^n

Сумма вероятностей $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.

Определение 13.4. Говорят, что дискретная форма случайной величины X имеет *распределение Пуассона* с параметром λ ($\lambda > 0$), если она принимает целые значения $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	…

Так как разложение e^x в ряд Маклорена имеет следующий вид $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, тогда сумма вероятностей $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

Обозначим через X число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A в независимых испытаниях, если вероятность появления А в каждом из них равна p $(0 < p < 1)$, а вероятность непоявления $q = 1 - p$. Возможными значениями X являются натуральные числа.

Определение 13.5. Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p $(0 < p < 1)$, если она принимает натуральные значения $k \in$ N с вероятностями $P(X = k) = q^{k-1} p$, где $q = 1 - p$.

X	1	2	3	…	n	…
P	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{k-1} p$	…

Ряд распределения:

Сумма вероятностей $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$.

Пример 13.2. Монета брошена 2 раза. Составить ряд распределения случайной величины X – числа выпадений «герба».

◀ $P_2(0) = C_2^0 q^2 = \frac{1}{4}$; $P_2(1) = C_2^1 qp = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $P_2(2) = C_2^2 p = \frac{1}{4}$.

Ряд распределения примет вид:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. ▶

Пример 13.3. Из орудия стреляют до первого попадания по цели. Вероятность попадания при одном выстреле 0,6. Найти вероятность того, что произойдёт попадание при 3-м выстреле.

◀ Поскольку $p = 0,6$, $q = 0,4$, $k = 3$, тогда $\mathrm{P}(A) = q^{k-1}p = 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$. ▶

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение дискретной случайной величины.
2 Что называется законом распределения случайной величины?
3 Что понимается под термином многоугольник распределения?
4 Какое распределение случайной величины называется биномиальным?
5 Какое распределение называется распределением Пуассона?
6 Дайте определение геометрического распределения.

14 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Полностью характеризует случайную величину закон распределения, однако часто он бывает неизвестен, поэтому приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами (параметрами), описывающими случайную величину суммарно. Они называются *числовыми характеристиками* случайной величины. К ним относятся: математическое ожидание, дисперсия и др.

Определение 14.1. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности. Обозначают математическое ожидание случайной величины X через $\mathrm{M}X = \mathrm{M}(X) = \mathrm{E}X$.

Если случайная величина X принимает конечное число значений, то $\mathrm{M}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Если случайная величина X принимает счетное число значений, то

$\mathrm{M}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причём математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.

Замечание 14.1. Математическое ожидание – некоторое число, приближённо равное определённому значению случайной величины.

Пример 14.1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная её ряд распределения

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

◀ $MX = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9$. ▶

Пример 14.2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

◀ Случайная величина X – число появления события A в одном испытании. Она может принимать значения $x_1 = 1$ (A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$, т. е. ряд распределения

X	1	0
P	p	q

$MX = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. ▶

Т. е., математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания

Свойство 14.1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: MC = C.

◀ Будем рассматривать постоянную C как дискретную случайную величину с рядом

C	C
P	1

Отсюда $MC = C \cdot 1 = C$. ▶

Замечание 14.2. Произведение постоянной величины C на дискретную случайную величину X определяется как дискретная случайная величина CX, возможные значения которой равны произведениям постоянной C на возможные значения X, вероятности этих значений CX равны вероятностям соответствующих возможных значений X.

Свойство 14.2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$M(CX) = C \cdot MX$.

◀Если случайная величина X имеет ряд распределения

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Ряд распределения случайной величины

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{\infty} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = C \cdot M(X). \blacktriangleright$$

Определение 14.2. Случайные величины X_1, X_2, ..., X_n называются *независимыми*, если для $\forall B_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\} = P\{X_1 \in B_1\} P\{X_2 \in B_2\} \ldots P\{X_n \in B_n\} \quad (14.1)$$

Если в качестве $B_i = (-\infty, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то получим из (14.1)

$$P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\} =$$
$$= P\{X_1 < x_1\}P\{X_2 < x_2\} \ldots P\{X_n < x_n\},$$

откуда получается другая формула:

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n) \quad (14.2)$$

для совместной функции распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которую можно также взять в качестве определения независимости случайной величины.

Свойство 14.3. Математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = MX \cdot MY.$$

Свойство 14.4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

Замечание 14.3. Свойства 14.3 и 14.4 можно обобщать на случай нескольких случайных величин.

Пример 14.3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игровых костей.

◀ Пусть X – число очков, выпавших на первой кости, Y – число очков, выпавших на второй кости. Они имеют одинаковые ряды распределения:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Поэтому MX = M$У$ = $\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$. Следовательно, математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игровых костей следующее: M$(X + У) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$. ►

Теорема 14.1. Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:

$$MX = np.$$

◄ Пусть X – число появлений события A в n независимых испытаниях. X_i – число появлений события A в i-том испытании, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. По свойствам математического ожидания $MX = \sum_{i=1}^{n} MX_i$. Из примера 14.2 $MX_i = p$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, отсюда $MX = \sum_{i=1}^{n} p = np$. ►

Определение 14.3. *Дисперсией* случайной величины называется число

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Определение 14.4. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется число $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

Замечание 14.4. Дисперсия является мерой разброса значений случайной величины вокруг её математического ожидания. Она всегда неотрицательна. Для подсчёта дисперсии удобнее пользоваться другой формулой: $DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) = M(X^2) - 2M(X \cdot MX) + M(MX)^2 = M(X^2) - MX \cdot MX + (MX)^2 = M(X^2) - (MX)^2$.

Отсюда $DX = M(X^2) - (MX)^2$.

Пример 14.4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной рядом распределения

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

◄ $MX = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$; $M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$; $DX = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$. ►

Свойства дисперсии

Свойство 14.5. Дисперсия постоянной величины равна 0:
$DC = 0$

◄ $DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = 0$. ►

Свойство 14.6. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат $D(CX) = C^2\,DX$.

◀ $D(CX) = M(C - CMX)^2 = M(C(X - MX)^2) = C^2\,M(X - MX)^2 = C^2DX$. ▶

Свойство 14.7. Дисперсия суммы двух *независимых* случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$D(X+Y) = DX + DY$.

◀ $D(X + Y) = M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (MX + MY)^2 = M(X)^2 + 2MXMY + M(Y^2) - (M(X)^2 + 2MXMY + M(Y)^2) = M(X^2) - (MX)^2 + M(Y^2) - (MY)^2 = DX + DY$. ▶

Следствие 14.1. Дисперсия суммы нескольких *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий.

Теорема 14.2. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в данном испытании.

$$DX = npq.$$

◀ X – число появлений события A в n независимых испытаниях, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i – число появлений A в i-м испытании, взаимно независимые, поскольку исход каждого испытания не зависит от исходов остальных.

X_i	1	0
P	p	q

Дисперсию будем искать по следующей формуле: $DX = \sum_{i=1}^{n} DX_i$. Из закона распределения получаем, что $MX_i = p$ и $MX_i^2 = p$, тогда $DX_i = M(X_i^2) - (MX_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$. Следовательно, $DX = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$. ▶

Пример 14.5. Проводятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию X – числа появлений события в этих испытаниях.

◀ Поскольку $n = 10$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, тогда $DX = npq = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$. ▶

Определение 14.5. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

$\nu_1 = \text{M}(X)$, $\nu_2 = \text{M}(X^2)$. Отсюда D$X = \nu_2 - \nu_1^2$.

Определение 14.6. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины $(X - \text{M}X)^k$.

$$\mu_k = \text{M}[(X - \text{M}X)^k].$$

Таким образом, $\mu_1 = \text{M}[X - \text{M}X] = \text{M}X - \text{M}X = 0$, $\mu_2 = \text{M}[(X - \text{M}X)^2] = \text{D}X$. Следовательно $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

По определению центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, можно получить формулы для моментов более высоких порядков:

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$,

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что такое математическое ожидание и как оно вычисляется?

2 Сформулируйте свойства математического ожидания.

3 Что такое дисперсия и как она вычисляется?

4 Что называется средним квадратическим отклонением и как оно вычисляется?

5 Сформулируйте свойства дисперсии.

6 Что называется начальным моментом и как он вычисляется?

7 Что называется центральным моментом и как он вычисляется?

15 Непрерывные случайные величины

15.1. Непрерывные случайные величины

Определение 15.1. Говорят, что случайная величина X *имеет вероятность* или *плотность распределения вероятностей*, если существует функция $p(x)$ такая, что функция распределения

$$F(x) = \text{P}\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \quad . \tag{15.1}$$

Пример 15.1. Найдите плотность распределения, если функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & при\ x > 0. \end{cases}$$

◄ Плотность распределения *p(x)* и функция распределения $F(x)$ связаны формулой (15.1), из нее получаем:

$$p(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ при } x>0;$$

$p(x) = F'(x) = 0$ при $x \le 0$.

Таким образом, плотность распределения данной случайной величины определяется следующей функцией:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & при\ x > 0. \end{cases}$$ ►

Пример 15.2. Найти функцию распределения $F(x)$случайной величины *X*, плотность вероятности которой определена функцией:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \,и\, x > 2, \\ x & при\ \ 0 < x \le 1, \\ 2-x & при\ \ 1 < x \le 2. \end{cases}$$

◄ Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (15.1). При $x \le 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$.

При $0 < x \le 1$ находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int\limits_{0}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} t\,dt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

При $1 < x \le 2$ имеем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int\limits_{0}^{1} p(t)dt + \int\limits_{1}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{1} t\,dt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)\,dt =$$

$$= 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2-\frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{2} p(t)dt + \int\limits_{2}^{x} p(t)dt = F(2) + \int\limits_{2}^{x} 0\,dt = 1.$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0\ и\ x > 2, \\ x^2/2 & при\ 0 < x \le 1, \\ -x^2/2+2x-1 & при\ 1 < x \le 2, \\ 1 & при\ x > 2. \end{cases}$$ ►

Определение 15.2. Случайная величина называется *непрерывной*, если она имеет плотность распределения вероятностей.

График функции *p(x)* (плотности распределения) называется *кривой распределения.*

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α,β) равна:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} p(t)dt \quad (15.2).$$

Пример 15.3. Плотность распределения случайной величины X задана функцией:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \frac{x}{2} & при\ 0 < x \le 2, \\ 0 & при\ x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1, 2).

◄ Необходимую вероятность найдем по формуле (15.2):

$$P\{1 < X < 2\} = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$ ►

15.2. Свойства плотности распределения

Свойство 15.1. $F'(x) = p(x)$.

Свойство 15.2. Плотность распределения – неотрицательная функция $p(x) \ge 0$.

◄ Т. к. $F(x)$ – неубывающая функция, то $F'(x) \ge 0$, $p(x) = F'(x) \ge 0$. ►

График плотности распределения называют *кривой распределения.* Кривая распределения расположена либо над осью Ox, либо на оси Ox.

Свойство 15.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

◀ В равенстве (15.1) вместо x ставим $x = +\infty$, получаем $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. ▶

Свойство 15.4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из множества B равна интегралу по множеству B от плотности распределения:

$$P(X \in B) = \int_B p(t)dt.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется плотностью распределения?

2 По какой формуле находится плотность распределения?

3 Что такое кривая распределения?

4 По какой формуле находится попадание значения случайной величины в определенный интервал?

5 Сформулируйте свойства плотности распределения.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1977 (2004, 2008). – 480 с.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по ТВ и МС / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1979 (2004, 2008). – 400 с.
3. Мацкевич, И. П. Высшая математика: ТВ и МС / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск. : Вышэйшая школа, 1993. – 269 с.
4. Еровенко, В. А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры, курс лекций / В. А. Еровенко. – Минск. : БГУ, 2006. – 175 с.
5. Бураковский, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: лабораторный практикум: в 2 ч. Ч. 1 / В. В. Бураковский. – Гомель. : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 52 с.
6. Свешников, А. А. Сборник задач по теории вероятности, математической статистики и теории случайных функций / А. А. Свешников. – М. : Наука, 1965. – 632 с.

Производственно-практическое издание

Бураковский Владимир Викторович
Бородич Тимур Викторович

Основы высшей математики

Практическое руководство
для студентов факультета иностранных языков
и исторического факультета

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 08.11.2012. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 30 экз. Заказ № 621.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.