

УДК 539.125.52:621.039.51.12

Разностный подход к решению уравнений гетерогенного реактора

КОЧУРОВ Б. П., МАЛОФЕЕВ В. М.

Уравнения гетерогенного реактора с точечными стоками-источниками были впервые сформулированы А. Д. Галаниным [1] и С. М. Фейнбергом [2]. Литература, посвященная гетерогенным методам расчета, весьма обширна. Общие гетерогенные уравнения, учитывающие конечность размеров блоков, включая дипольную формулировку, содержатся в работах [3, 4]. Уравнения гетерогенной теории имеют матричную структуру, так что счетное время и потребности в машинной памяти растут квадратично с числом блоков, что не позволяет даже на современных ЭВМ эффективно рассчитывать реакторы с числом блоков, превышающим несколько сот.

Гомогенные уравнения имеют конечно-разностный вид и поэтому применимы к большим реакторам с несколькими тысячами узлов. Авторами [5] и [6] предложена конечно-разностная формулировка уравнений стока-источника. Главные члены их уравнений имеют обычный конечно-разностный «гомогенный вид», а поправочные члены зависят от более далеких узлов и учитывают гетерогенные эффекты.

В последнее время С. С. Городковым [7] предложен так называемый квазиальбердинский метод, основанный на построении элементарных решений в ячейках и их сшивании исходя из учета некоторых требований наибольшей гладкости полного решения в реакторе. Этот метод позволил рассчитывать гетерогенные реакторы с большим числом блоков. Однако вывод таких уравнений, с одной стороны, достаточно сложен, с другой — недостаточно четко прослеживается их связь с гетерогенной теорией.

В настоящей работе предложен метод непосредственного преобразования гетерогенных уравнений к конечно-разностному виду. Используемый здесь метод близок к подходу Д. Блэкбарна. Однако формальные преобразования исходного гетерогенного уравнения значительно упростили процедуру. Применение разностного оператора со свободными параметрами, выбираемыми из требования наилучшего уничтожения далеких членов, сразу приводит к разностному уравнению, непосредственно связанному с исходным гетерогенным уравнением. Для его формулировки не требуется при-

влечения таких понятий, как средние потоки в реакторных ячейках.

Полученный разностный оператор, обеспечивающий достаточную (и в действительности весьма высокую) точность, оказывается шире, чем традиционный оператор Лапласа (разностная схема для квадратной решетки должна включать не менее 9 точек, что согласуется с результатами С. С. Городкова), так что ряд широко используемых «гомогенных» алгоритмов решения оказывается неприменимым. Однако чебышевские итерационные методы вполне подходят в этом случае и были успешно использованы в настоящей работе.

Формулировка уравнений гетерогенного реактора. Вместо точечной теории стоков-источников использована общая формулировка гетерогенных уравнений в малогрупповом (с числом групп G) приближении (см. [3, 4, 8]). Предполагается, что расстояния между поверхностями блоков превосходят несколько длин пробега нейтронов в замедлителе, а граничные условия на поверхностях блоков заданы в достаточно общем виде — через Λ -матрицы:

$$dN = \Lambda N; \quad d \equiv \rho (\partial/\partial r)|_{r=\rho}. \quad (1)$$

Здесь N — вектор экстраполированных значений потоков нейтронов размерности $G \times K$; K — число блоков; Λ — диагональная по k матрица, составленная из $G \times G$ -матриц для блоков каждого сорта; ρ — матрица из радиусов блоков. Групповые потоки в замедлителе удовлетворяют системе уравнений:

$$(\Delta - \xi_g) n_g = -\xi_{g-1} n_{g-1}; \quad g = 1, \dots, G, \quad (2)$$

где $\xi_g = 1/\tau_g$; $\xi_G = 1/L^2$ и n_g ($g < G$) отличаются от плотностей замедления множителями τ_g/D_G (D_G — коэффициент диффузии тепловых нейтронов; τ_g , L^2 — квадраты длины замедления и диффузии в замедлителе). Общее решение системы (2) для реактора высотой H имеет вид

$$N = C \mathcal{F} A, \quad (3)$$

где треугольная матрица C (в предположении, что потери энергии при столкновениях нейтронов с замедлителем меньше ширины групп) сос-

тоит из элементов:

$$\begin{aligned} C_{gg} &= 1; & C_{gg'} &= v_{gg'} C_{g-1, g'}; \\ v_{gg'} &= \xi_{g-1} / (\xi_g - \xi_{g'}) \quad (g > g'); \end{aligned} \quad (4)$$

A — произвольный вектор размерности $K \times G$; матрица \mathcal{F} размерности $(K \times G) \times (K \times G)$ [диагональная по $1 \leq g \leq G$] состоит из функций влияния, зависящих от граничных условий на внешней поверхности реактора. Имея в виду, что граничные условия можно сформировать с помощью фиктивных источников, помещенных вне реактора в безгранично продолженном замедлителе, а в разностной формулировке граничные условия учитываются непосредственно, достаточно взять функции влияния в бесконечном замедлителе. В этом случае с использованием теорем сложения для бесселевых функций получаем

$$\mathcal{F} = K_0 + I_0 F, \quad (5)$$

где K_0, I_0 — диагональные по k матрицы из элементов

$$K_0(x_g \rho_k), \quad I_0(x_g \rho_k);$$

$x_g^2 = \xi_g^2 + \pi^2/H^2$, а элементы матрицы F равны

$$F_{k1}^g = K_0(x_g |r_k - r_1|) (1 - \delta_{k1}). \quad (6)$$

Применив граничные условия (1) к (3), можно получить:

$$\left. \begin{aligned} dN &= dC \mathcal{F} A = Cd \mathcal{F} A; \\ d\mathcal{F} &= dK_0 + dI_0 I_0^{-1} (I_0 F + K_0 - K_0) = \\ &= -I_0^{-1} + dI_0 I_0^{-1} C^{-1} C \mathcal{F}; \\ dN &= -CI_0^{-1} A + CdI_0 I_0^{-1} C^{-1} N = \Delta N; \\ A &= \gamma N; \quad \gamma = -I_0 C^{-1} \Lambda + dI_0 C^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь было использовано выражение для вронскиана бесселевых функций:

$$dK_0 - dI_0 I_0^{-1} K_0 = -I_0^{-1}.$$

Подстановка A в равенство (3) дает

$$N = C \mathcal{F} \gamma N.$$

Уравнения подобной структуры, в которые входит только N , но не A , в несколько ином виде формулировались в работах [3, 4].

Если выделить в γ ту часть γ_1 , которая пропорциональна источникам от нейтронов деления, и разделить ее на собственное число — эффективный коэффициент размножения λ , делающий реактор критичным ($\gamma \rightarrow \gamma_1/\lambda - \gamma_2$), то уравнение для N превращается в следующее:

$$N = (C \mathcal{F} \gamma_1/\lambda - C \mathcal{F} \gamma_2) N. \quad (8)$$

Отметим, что γ -матрица связана с Λ -матрицей простыми преобразованиями (7), затрагивающими отдельно каждый тип блоков.

Преобразование уравнений гетерогенного реактора к разностным уравнениям. Перейдем теперь к разностной формулировке задачи (8). Введем произвольную (диагональную по k и g) матрицу D^* и приняв во внимание (5), уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} UN &= (I_0^{-1} K_0 + F) (\gamma_1/\lambda) N - (F + D) \gamma_2 N; \\ U &= I_0^{-1} C^{-1} + (I_0^{-1} K_0 - D) \gamma_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Относительно переменной $\tilde{N} = UN$ получается уравнение

$$\tilde{N} = (I_0^{-1} K_0 + F) (\tilde{\gamma}_1/\lambda) \tilde{N} + (F + D) \tilde{\gamma}_2 \tilde{N}; \quad (10)$$

$$\tilde{\gamma}_{1,2} = \gamma_{1,2} U^{-1}. \quad (11)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}_{1,2}$ связаны с $\gamma_{1,2}$ простыми преобразованиями отдельно для каждого типа блоков и играют роль эффективных характеристик для \tilde{N} . Уравнение (10) имеет структуру уравнения для точечных блоков, хотя в исходной теории этого не предполагалось; характеристики, связанные с конечностью блоков, заключены в $\tilde{\gamma}_{1,2}$.

Цель преобразований, приводящих к уравнению (10), состояла в том, чтобы первым оператором слева оказалась матрица F (6).

Если в элементах матрицы F вместо r_k взять произвольный вектор r , то каждый из них при $r \neq r_1$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta - x_g^2) F^g(r, r_1) = 0.$$

Приближенно это равенство будет выполняться, если на переменную r_k действовать разностным оператором, который содержит оператор Δ_1 . Последний заменяет лапласиан на сетке, состоящей из узлов решетки (a — шаг решетки):

$$\begin{aligned} (\Delta_1 - x_g^2 a^2) F^g(r_k, r_1) &\approx 0; \quad |k_i - l_i| > 1; \\ \Delta_1: f_k &\rightarrow \left(\sum_Q f_{k+Qe_1} - 4f_k \right) / |e_1|^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $e_1 = (1, 0)$, а Q задает повороты вектора на $0, 90, 180$ и 270° .

Теперь откажемся от того, чтобы оператор в уравнении (12) был в точности оператором лапласа на сетке. Потребуем лишь, чтобы он был устроен «локально», т. е. связывал только некоторые соседние точки. Кроме того, естественно потребовать его симметрию при поворотах

* Матрица D введена в целях тождественного изменения структуры уравнений, что может влиять на скорость сходимости итерационных процессов. До сих пор принималось $D = 0$.

вокруг точки \mathbf{k} на сетке, совмещающих ее саму с собой. Для квадратной решетки можно взять оператор P (диагональный по g с элементами P_g), связывающий значения функции на соседних блоках:

$$P_g : f_{\mathbf{k}} \rightarrow (-\alpha_1 \Delta_1 - \alpha_2 \Delta_2 - \dots - \alpha_I \Delta_I + \beta x_g^2 a^2) f_{\mathbf{k}}; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 1; \quad \alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1}).$$

Оператор Δ_2 отличается от Δ_1 заменой $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ на $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$, т. е. Δ_2 охватывает следующий ближайший к \mathbf{k} ряд блоков и т. д. Например, в случае 9-точечной схемы P_g содержит только Δ_1 , Δ_2 и $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Обозначим $U_{\mathbf{k}}$ множество соседних индексов, охватываемых оператором P_g .

От параметров α и β в (13) естественно потребовать, чтобы они позволяли наилучшим образом аннулировать элементы $F_{\mathbf{k}l}$ вне $U_{\mathbf{k}}$. Поскольку $F_{\mathbf{k}l}$ инвариантны относительно сдвигов решетки, для нахождения α и β достаточно рассмотреть случай $\mathbf{k} = 0$. Можно предложить различные критерии, однако до сих пор использовались два — в метриках L^∞ и L^2 :

$$\max_{\mathbf{l}} |P_g(\alpha, \beta) F_{0, \mathbf{l}}^g| \rightarrow \min, \quad \mathbf{l} \notin U_0; \quad (14)$$

$$\sum_{\mathbf{l}} [P_g(\alpha, \beta) F_{0, \mathbf{l}}^g]^2 \rightarrow \min, \quad \mathbf{l} \notin U_0, \quad (15)$$

где \mathbf{l} пробегает достаточно большое множество точек, охватывающих точку 0. Если действовать слева на обе части уравнения (10) оператором $P(\alpha, \beta)$, полученным в результате решения задач (14) или (15), то для каждого \mathbf{k} он приближенно аннулирует все элементы матриц в (10) вне области $U_{\mathbf{k}}$. Напротив, элементы $F_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}, \mathbf{l} \in U_{\mathbf{k}}$ не уничтожаются. Обозначим R результат действия оператора $P(\alpha, \beta)$ на $F_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}, \mathbf{l} \in U_{\mathbf{k}}$:

$$R = P(\alpha, \beta)(F + D). \quad (16)$$

Вместо (10) получаем уравнение

$$(P + R\tilde{\gamma}_2)\tilde{N} = [P(I_0^{-1}K_0 - D) + R](\tilde{\gamma}_1/\lambda)\tilde{N}, \quad (17)$$

если пренебречь результатом действия P на $F_{\mathbf{k}l}, \mathbf{l} \notin U_{\mathbf{k}}$.

Соотношение (17) имеет структуру разностного уравнения: для каждого \mathbf{k} действие операторов P и R сосредоточено в области $U_{\mathbf{k}}$, остальные матрицы — $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 (I_0^{-1}K_0 - D)$ — диагональны по \mathbf{k} . Следует отметить, что матрица $R\tilde{\gamma}_2$ имеет треугольную по g структуру.

Расширяя область $U_{\mathbf{k}}$, т. е. присоединяя новые ряды блоков и соответственно пополюя на-

бор α, β новыми параметрами, можно в принципе все более точно аннулировать оператор F вне $U_{\mathbf{k}}$. Если оператор F короткодействующий (в эпитепловых группах), его можно оставить в исходном виде, как в уравнении (10).

Хотя изложенная теория развита для монопольного приближения, ее можно использовать и для гетерогенных уравнений в дипольной формулировке. Символически уравнения (8) и (10) останутся прежними, но матрица F пополнится элементами вида

$$K_n(x_g | \mathbf{r}_{\mathbf{k}} - \mathbf{r}_1 |) \exp(in \psi_{\mathbf{k}l}); \quad n = \pm 1, \quad (18)$$

где в качестве $\psi_{\mathbf{k}l}$ может быть выбран угол между некоторым фиксированным направлением и вектором $(\mathbf{l} - \mathbf{k})$; к ним также может быть применена процедура вида (14) или (15), ведущая к разностным уравнениям, подобным (17). Очевидно, теория применима и к реакторам с блоками в узлах треугольной или шестигранной решеток.

Решение задач (14) или (15) зависит только от одного параметра $z \equiv x_g a$. В табл. 1 для некоторых z приведено решение задачи (14): параметры α_1, β ; элементы оператора R в точках 0, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; значения функции Бесселя $K_0(z)$; максимальная погрешность $\varepsilon = \max |PF|, \mathbf{l} \notin U_{\mathbf{k}}$ для 9-точечной схемы в квадратной решетке. Отличие β от 1 характеризует, насколько сильно оператор P отличается от оператора $\Delta_1 - z^2$, значения $K_0(z)$ показывают, как далеко распространяется действие исходного оператора F . Следует отметить, что знаки элементов оператора R противоположны знакам оператора P , и в целом, как это следует из сравнения с гомогенными уравнениями, $R\tilde{\gamma}_2$ характеризует средний квадрат длины миграции нейтронов в решетке реактора (а не в чистом замедлителе).

Метод решения разностных уравнений. К настоящему времени решение уравнения (17)

Зависимость результата решения задачи (14) от z для 9-точечной схемы в квадратной решетке Таблица 1

z	α_1	β	R_0	R_1	R_2	K_0	ε
0,1	0,6425	0,9966	-7,730	2,732	0,7614	2,427	1,634 ⁻³
0,5	0,6437	1,020	-2,846	1,706	0,4719	0,924	1,535 ⁻³
1,0	0,6477	1,086	-1,259	1,283	0,3441	0,421	1,279 ⁻³
2,0	0,6624	1,385	-0,330	0,906	0,2122	0,114	0,667 ⁻³
3,0	0,6834	2,039	-0,100	0,731	0,1362	0,035	0,259 ⁻³
4,0	0,7080	3,381	-0,032	0,636	0,0876	0,011	0,081 ⁻³

Основные характеристики реакторов Таблица 2

Параметры	Вариант		
	1	2	3
Число групп	2	3	3
Радиус реактора, см	650	500	105
Шаг, см	26	20	8,5
Возраст нейтронов, см ²	100	40; 80	80; 40
Квадрат длины диффузии, см ²	10000	5000	10000
Число каналов	55; 2	124; 20; 77	124; 97
Радиусы топливных каналов, см	5,7; 2,9	5; 3; 5	3; 3

запрограммировано в монопольном малогрупповом приближении для квадратной решетки с использованием 9- и 5-точечной схем. При этом использовался метод итерации источника с ускорением по методу Чебышева в сочетании с методом Чебышева для внутренних итераций [9]. Набор чебышевских параметров для внутренних итераций определялся после предварительной оценки граници спектра операторов:

$$A_g = P_g + R_g \tilde{\gamma}_{2,gg}. \quad (19)$$

Как показал опыт расчетов, границы спектра операторов A_g всегда находились на вещественной оси комплексной плоскости и были положительны, что необходимо для сходимости внутренних итераций. Добавление к P_g оператора $R_g \tilde{\gamma}_{2,gg}$ приводило к сужению граници спектра и способствовало лучшей сходимости.

Численное сравнение с прямым методом. Решение разностного уравнения (17) численно сравнивалось с результатами непосредственного метода решения уравнения (8) (модификация программы DIGGER [8] для БЭСМ-6, ФОРТРАН) для цилиндрического реактора радиуса R_p с соответственно измененными функциями влияния.

Для 5-точечной схемы погрешность ϵ велика — на два порядка выше, чем соответствующие числа в табл. 1 для 9-точечного случая. Это приводит к значительным отличиям от прямого метода — обычно до нескольких процентов в потоках нейтронов и порядка процента в собственном числе.

Однако 9-точечная схема дает результаты хорошей точности: как правило, отличия в групповых потоках нейтронов (тепловых и эпитепло-

вых) не превышают нескольких десятых процента, а в эффективном коэффициенте размножения нейтронов — нескольких сотых процента. В табл. 2 представлены основные характеристики трех реакторов. Отличия в коэффициенте размножения и максимальные отличия в потоках нейтронов по прямому (8) и разностному (17) методам составляют: для 1- и 2-го вариантов $< 10^{-4}$ и $< 10^{-3}$; для 3-го варианта $2,5 \cdot 10^{-4}$ и $1,4 \cdot 10^{-3}$ соответственно. В 1-м варианте активная зона реактора имела каналы, типичные для тяжеловодного реактора на природном уране с газовым охлаждением [10], и два несимметрично расположенных регулятора, причем размер отражателя был взят достаточно большим с тем, чтобы исключить небольшие отличия в описании условий на внешней границе реактора в прямом и разностном методах (в последнем случае круглая граница аппроксимировалась ломаной линией). Во 2-м варианте в активной зоне использованы блоки с замедлителем и некоторое число легких поглощающих стержней и пустых труб. В 3-м варианте выбран реактор небольших размеров, в нем размещены блоки с замедлителем и несколько тяжелых регуляторов.

Таким образом, предложенный разностный метод дает возможность получать решение уравнений гетерогенного реактора (для квадратной решетки следует использовать схемы с числом точек не ниже 9) с хорошей, вполне достаточной для практики точностью.

Поступила в Редакцию 23/IV 1976 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин А. Д. В сб.: Материалы международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955). Т. 5. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 571.
2. Фейлберг С. М. Там же, с. 578.
3. Auerbach T. EIR-200, Eidg. Inst. f. Reaktorforschung. Würenlingen, Switzerland, 1970.
4. Галанин А. Д. Теория гетерогенного реактора. М., Атомиздат, 1971.
5. Blackburn D. In: Proc. EAES Symp. on Advances in Reactor Theory. Karlsruhe, 1963, v. 2.
6. Blackburn D., Griggs C. In: Proc. Conf. on Applications of Computing Methods to Reactor Problems. ANL-7050. Illinois, 17-19 May 1965, p. 231.
7. Городков С. С. Препринт ИАЭ-2251; препринт ИАЭ-2296. М., 1973; препринт ИАЭ-2502. М., 1975.
8. Кочуров В. П. Препринт ИТЭФ-2. М., 1974.
9. Лебедев В. И., Финигонов С. А. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1973, т. 13, № 1, с. 18.
10. Абрамов В. М. и др. «Атомная энергия», 1974, т. 36, вып. 2, с. 113.