А. Г. Капустин, Н. С. Карнаухов
г. Минск, БГАА

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

В работе рассмотрена задача статической линеаризации и определение параметров системы с переменной структурой в установившемся режиме в предположении нормальности совместного закона распределения выходных координат [1, с. 23].

Линеаризация и определение параметров проведены в пакете моделирования MatLab на примере комбинированной следящей системы с переменной структурой, использующей дифференцирующее устройство [2, с. 660]. Структурная схема данной системы в пакете моделирования MatLab представлена на рисунке 1.

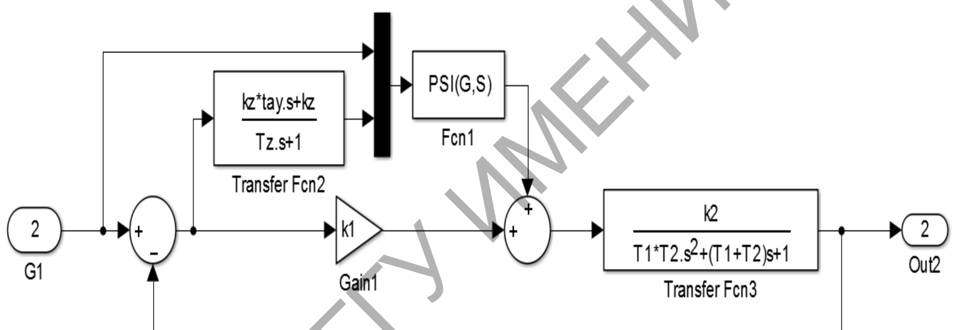

Рисунок 1 – Структурная схема комбинированной следящей системы с переменной структурой

На входе такой нелинейной автоколебательной системы действует сигнал G1, являющийся стационарной случайной функцией времени с известным математическим ожиданием m_g и спектральной плотностью $S_g(\omega)$, выход системы обозначен звеном Out2 [3, с. 74].

Исследуя собственное движение системы с переменной структурой в установившемся режиме как случайное, необходимо определить математическое ожидание, дисперсию и плотность ошибки m_x и $S_x(\omega)$.

Система дифференциальных уравнений, описывающих работу системы, имеет вид:

$$\begin{gathered} k_1 k_2 X + k_2 = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)[G - X], \\ U = \Psi(G, S) \cdot G, \end{gathered} \quad (1)$$

где $\Psi(G,S)=\begin{cases}+\lambda \text{ при } G\cdot S>0\\ -\lambda \text{ при } G\cdot S\le 0\end{cases}$,

$$S=\frac{k_3(\tau p+1)}{(T_3p+1)}\cdot X,$$

$$p=\frac{d}{dt}.$$

Заменим нелинейное преобразование (1) статически линейной зависимостью [1, с. 23]:

$$U=U_0+h_1^*G^0(t)+h_2^*S^0(t), \qquad (2)$$

где $U_0=U_0\left(m_g,m_s,D_{ss},D_{gg},D_{sg}\right)$ – статическая характеристика нелинейного звена переменной структуры, $h_1^*=h_1^*\left(m_g,m_s,D_{ss},D_{gg},D_{sg}\right)$, $h_2^*=h_2^*\left(m_g,m_s,D_{ss},D_{gg},D_{sg}\right)$ – статические коэффициенты передачи нелинейного звена по случайным составляющим, $G^0(t)$, $S^0(t)$ – центрированные составляющие, $m_g,m_s,D_{ss},D_{gg},D_{sg}$ – соответственно математическое ожидание, дисперсии и взаимный корреляционный момент сигналов.

Для установившегося режима в соответствии с (2) справедливы зависимости:

$$\begin{cases}m_x=\dfrac{m_g-k_2\cdot U_0}{k_1\cdot k_2+1}\\ m_s=k_3\cdot m_x\end{cases} \qquad (3)$$

Выражения для определения центрированных составляющих имеют вид:

$$X^0=W_1(p)\cdot G^0,$$

$$S^0=W_1(p)\cdot k_3\cdot\frac{\tau p+1}{T_3p+1}\cdot G^0,$$

$$W(p)=\frac{\left[(T_1p+1)(T_2p+1)-k_2h_1^*\right](T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+k_1k_2(T_3p+1)+k_2k_3h_2^*(\tau p+1)}. \qquad (4)$$

В соответствии с [1, с. 23]в установившемся режиме дисперсия и спектральная плотность могут быть вычислены как:

$$D_{xx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W_1(j\omega)\right|^2\cdot S_g(\omega)d\omega, \qquad (5)$$

$$S_x(\omega)=\left|W_1(j\omega)\right|^2\cdot S_g(\omega). \qquad (6)$$

Как следует из (3), (4–6), для определения характеристик точности и спектральной плотности необходимо знать коэффициенты статической линеаризации U_0, h_1^*, h_2^*.

Последовательно линеаризуем нелинейности элемента

$U_3=G\cdot S.$

Представим каждую из составляющих входного сигнала в виде:

$$G=m_g+G^0,$$

$$S=m_s+S^0,$$

где m_g, m_s, G^0, S^0 – соответственно математические ожидания и центрированные составляющие сигналов.

Тогда:

$$U_3-m_gm_s+m_gS^0+m_sG^0+S^0G^0 \qquad (7)$$

Заменим (7) приближенной линейной зависимостью вида:

$$\tilde{U}_3=\varphi_{03}+k_1^*G^0+k_2^*S^0. \qquad (8)$$

где представляет собой неслучайную функцию, являющуюся статической характеристикой нелинейности (7); k_1^*, k_2^* – статические коэффициенты усиления.

Входящую в (8) функцию φ_{03}, определим из условия равенства математических ожиданий истинной и аппроксимирующих функций:

$$\varphi_{03}=M\left[\tilde{U}_3\right]=M[U_3]=m_gm_s+D_{sg}.$$

В отличие от используемых ранее способов статической линеаризации [1, с. 31] коэффициенты k_1^* и k_2^* будем искать в виде:

$$k_i^* = k_{1i} + \lambda_3, (i = 1,2),$$

где k_{1i} – коэффициенты статистической линеаризации, выбранные из условия минимума среднего квадрата ошибки

$$k_{1i} = \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial m_{sg}}, (i = 1,2);$$

λ_3 – коэффициент, общий для всех центрированных составляющих в линеаризованной зависимости, выбранный из условия равенства дисперсий истинной и аппроксимирующей функций.

Производя вычисления, получим:

$$k_1^* = m_s + \lambda_3, \quad k_2^* = m_g + \lambda_3, \tag{9}$$

$$\lambda_3 = \frac{m_s D_{gg} + m_g D_{ss} + D_{sg}(m_g + m_s)}{D_{gg} + D_{ss} + 2D_{sg}} +$$

$$+\sqrt{\frac{[m_s D_{gg} + m_g D_{ss} + D_{sg}(m_g + m_s)]^2}{[D_{gg} + D_{ss} + 2D_{sg}]^2} + \frac{D_{gg} + D_{ss} + D_{sg}^2}{D_{gg} + D_{ss} + 2D_{sg}}}.$$

Из анализа (9) и (10) следует, что при $m_g = m_s = 0$ коэффициенты k_1^* и k_2^* не равны нулю, а имеют вполне определенное значение.

Заметим, что знак перед корнем в (17) определяется знаком k_{1i}.

Линеаризуя зависимость

$$\psi\begin{cases}\lambda' \text{ при } G \cdot S > 0\\ \lambda' \text{ при } G \cdot S \le 0\end{cases}$$

будем иметь на выходе релейного элемента[1, с. 23]:

$$\tilde{U}_2 = \varphi_{02} + \xi_{(1)} \cdot \tilde{U}_3^0, \tag{11}$$

где
$$\varphi_{02} = 2\lambda' \Phi\left(\frac{\varphi_{03}}{\sqrt{D_{33}}}\right),$$

$$\xi_{(1)} = \frac{\lambda'}{\sqrt{D_{33}}} \cdot \left[1 - 4\Phi\left(\frac{\varphi_{02}}{\sqrt{D_{33}}}\right)\right],$$

$$\tilde{U}_3^0 = k_1^* \cdot G^0 + k_2^* \cdot S^0, \tag{12}$$

$$D_{33} = m_s^2 D_{gg} + m_g^2 D_{ss} + 2m_s m_g D_{gg} + D_{gg} D_{ss} + D_{sg}^2.$$

Наконец, линеаризуя (1), получим:

$$U_1 = \varphi_{01} + h_1 \tilde{U}_2^0 + h_2 G^0,$$

где $\varphi_{01} = \varphi_{02} \cdot m_g + \xi_{(1)} D_{g3}$, (13)

$$D_{g3} = M[G^0 \tilde{U}_3^0] = k_1^* D_{gg} + k_2^* D_{sg},$$

$$h_1 = m_g + \lambda_1,$$

$$h_2 = \varphi_{02} + \lambda_1,$$

$$\lambda_1 = -\frac{m_g D_{22} + \varphi_{02} D_{gg} + (m_g + \varphi_{02}) D_{2g}}{D_{22} + D_{gg} + D_{2g}} +$$

$$+\sqrt{\frac{[m_g D_{22} + \varphi_{02} D_{gg} + (m_g + m_s) D_{2g}]^2}{[D_{22} + D_{gg} + 2D_{2g}]^2} + \frac{\xi_{(1)}(D_{gg} D_{ss} + D_{3g}^2)}{D_{22} + D_{gg} + 2D_{sg}}}.$$

$$D_{22} = \xi_{(1)}^2 \cdot D_{33},$$

$$D_{2g} = \xi_{(1)} \cdot D_{3g},$$
$$\bar{U}_2^0 = \xi_{(1)} \cdot \tilde{U}_3^0. \qquad (14)$$

Окончательно, с учетом (11),(12), (14) получим:

$$U_1 = \varphi_{01} + h_1^* G^0 + h_2^* S^0, \qquad (15)$$

где $h_1^* = h_2 + h_1 k_1^* \xi_{(1)},$ $\qquad (16)$

$$h_2^* = h_1 \xi_{(1)} k_2^*. \qquad (17)$$

Неизвестные дисперсии и взаимный корреляционный момент определяются как:

$$D_{SS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| W_1(j\omega) \cdot \frac{k_3(Tj\omega + 1)}{T_3 j\omega + 1} \right|^2 \cdot S_g(\omega) d\omega, \qquad (18)$$

$$D_{Sg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(j\omega) k_3 \frac{\tau j\omega + 1}{T_3 j\omega + 1} \cdot S_g(\omega) d\omega. \qquad (19)$$

Решение (3), (4), (5), (13), (15), (16), (17), (18), (19) возможно только совместно.

Пусть спектральная плотность помехи на входе имеет вид:

$$S_g = \frac{2D_{gg} \cdot \omega}{\omega_0^2 + \omega^2}.$$

Соответственно $k_g(\tau) = D_{gg} \cdot e^{-\omega_0 |\tau|}$.

Для получения конкретных значений числовых характеристик и спектральной плотности зададим параметрам системы значения: $k_1 = 5$; $k_2 = 2{,}5$; $k_3 = 0{,}5$; $T_1 = 0{,}4$; $T_2 = 0{,}1$; $T_3 = 0{,}02$; $\tau = 0{,}25$; $\lambda' = 0{,}5$; $\omega_0 = 12$.

Значения m_g и D_{gg} на входе системы варьируются.

Для указанных значений параметров задача решалась методом итераций [4, с. 184].

С применением пакета моделирования MatLab были получены графики изменений математических ожиданийи дисперсий выходного сигнала в зависимости от математического ожидания и дисперсии входного сигнала; графики изменения спектральной плотности ошибки в зависимости от дисперсии на входе [4, с. 184]. Проведенные исследования и анализ результатов в пакете моделирования MatLab позволили сделать следующие выводы:

1. Наличие помехи на входе системы приводит к срыву «скользящего» режима и появлению ошибки слежения, величина которой зависит от соотношения «сигнал-шум» на входе системы.

2. При увеличении интенсивности помехи на входе системы (уменьшении соотношения «сигнал-шум») максимум спектральной плотности смещается в область более низких частот, а величина максимума увеличивается.

3. Для исследования поведения системы с переменной структурой в установившемся режиме можно использовать метод статической линеаризации. При статической линеаризации мультипликативных нелинейностей целесообразно несколько видоизменить способ выбора и определения коэффициентов статической линеаризации. Приведенная процедура расчета отличается сравнительной простотой и не требует громоздких вычислений.

Список использованных источников

1 Ким, Д. П. Теория автоматического управления / Д. П. Ким. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т. 1. Линейные системы. – 288 с.

2 Дьяконов, В. П. Simulink 5/6/7 : самоучитель / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК–Пресс, 2008. – 784 с.

3 Карнаухов, Н. С. Применение инструментальных средств пакета Simulink&MatLab для упрощения исследований и визуализации процессов электрических машин / Н. С. Карнаухов // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы 6-й междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 25–28 марта 2014 г. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2014. – 198 с.

4 Капустин, А. Г. Исследование систем генерирования методом структурного моделирования / А. Г. Капустин, Н. С. Карнаухов // Совершенствование обеспечения полетов авиации : тезисы докладов 3-й военно-науч. конф. курсантов и молодых ученых / редкол. : А. А. Санько, С. А. Савостеев [и др.]. – Минск : МГВАК. 2013. – 273 с.