

С. Е. Карпович, В. В. Кузнецов, В. В. Поляковский
г. Минск, БГУИР

ФОРМИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В прецизионном оборудовании микроэлектроники и нанoeлектроники, включая оптико-механическое и сборочные, для реализации программируемых движений инструмента или объекта обработки находят все больше применения мехатронные системы координатных перемещений, построенные на основе механизмов параллельной кинематики, приводящихся в движение гибридными многокоординатными приводами прямого действия [1]. Управляющие позиционные и кинематические функции определяются структурой исполнительного механизма параллельной кинематики и конфигурацией соответствующего многокоординатного привода, для которого необходимо решать задачу по определению законов перемещений подвижных управляемых элементов привода в зависимости от требуемого закона перемещения в трехмерном пространстве выходного звена (рабочей платформы). Такая задача в теории роботов и мехатронных систем перемещений называется обратной задачей кинематики [2]. Алгоритмы ее

решения в реальном оборудовании используются при программировании системы управления механизмов координатных перемещений позиционного и контурного типов по кинематическим критериям.

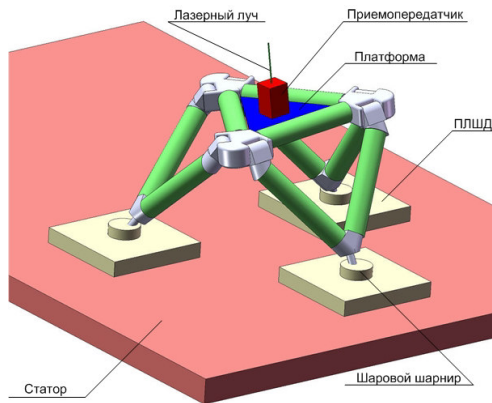


Рисунок 1 – Пространственная система перемещений

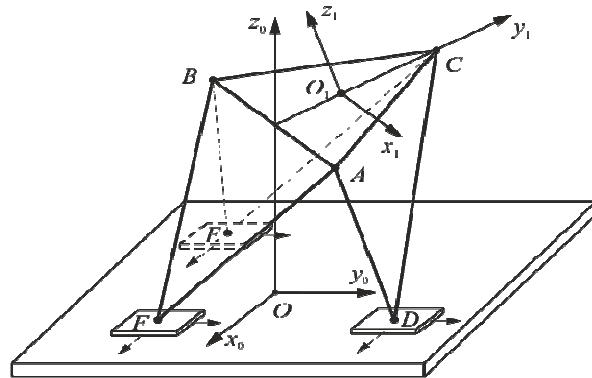


Рисунок 2 – Структурно-кинематическая расчетная схема

В настоящей статье рассматривается решение обратной задачи кинематики для системы перемещений, показанной на рисунке 1, состоящей из механизма параллельной кинематики с четырьмя кинематически связанными треугольными звеньями и многокоординатного привода, интегрированного на одном статоре в виде трех двухкоординатных планарных шаговых двигателей ПЛШД (рисунок 1). Подвижные треугольные звенья кинематически связаны через шаровой шарнир с соответствующими индукторами ПЛШД. Система перемещений, представленная на рисунке 1, предназначена для лазерной обработки планарных структур в производстве БИС и СБИС, а также для автоматического тестирования печатных плат больших форматов [1]. Структурно-кинематическая расчетная схема этой системы перемещений приведена на рисунке 2, из которой видно, что она топологически образована четырьмя шарнирно-связанными равносторонними треугольными звеньями ABC, ADC, CEB и AFB со сторонами равными a . Поворотные взаимные их движения происходят по линиям (осям) AC, CB и AB. Соответственно, замыкание этой параллельной кинематической цепи осуществляется в одной общей для всех сферических шарниров плоскости через три планарных шаговых двигателя в точках D, E и F.

С учетом вышесказанного, для рассматриваемой в статье системы перемещений, обратная задача кинематики состоит в нахождении текущих координат точек D, E и F трех ПЛШД в зависимости от положения и ориентации треугольной платформы ABC.

Для описания такой пространственной конфигурации выберем системы координат: $S_0(x_0, y_0, z_0)$ – неподвижную, связанную со статором привода ПЛШД и $S_1(x_1, y_1, z_1)$ – подвижную, жестко связанную с подвижным выходным звеном ABC, движение которого в пространстве определяется технологическими требованиями на программируемые перемещения.

Положение системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ в системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ принято в робототехнике [2; 3] представлять в матричном виде в однородных координатах и задавать матрицей четвертого порядка вида:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_0) & \cos(y_1, x_0) & \cos(z_1, x_0) & x_{01} \\ \cos(x_1, y_0) & \cos(y_1, y_0) & \cos(z_1, y_0) & y_{01} \\ \cos(x_1, z_0) & \cos(y_1, z_0) & \cos(z_1, z_0) & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

В матрице (1) начало O_1 подвижной системы координат S_1 , представленное в системе координат S_0 , определяется элементами четвертого столбца $a_{14} = x_{01}$, $a_{24} = y_{01}$, $a_{34} = z_{01}$ а остальные элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) верхней квадратной матрицы размера 3×3 – в виде направляющих косинусов определяют ориентацию системы координат S_1 по отношению к системе координат S_0 .

Матрица M_{01} , позволяет преобразовывать и пересчитывать координаты любых точек T_i , заданных в системе координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ в систему координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ по матричному выражению:

$$R_0^{T_i} = M_{01} R_1^{T_i}, \text{ где } R_1^{T_i} = \begin{bmatrix} x_1^{T_i} \\ y_1^{T_i} \\ z_1^{T_i} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_0^{T_i} = \begin{bmatrix} x_0^{T_i} \\ y_0^{T_i} \\ z_0^{T_i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

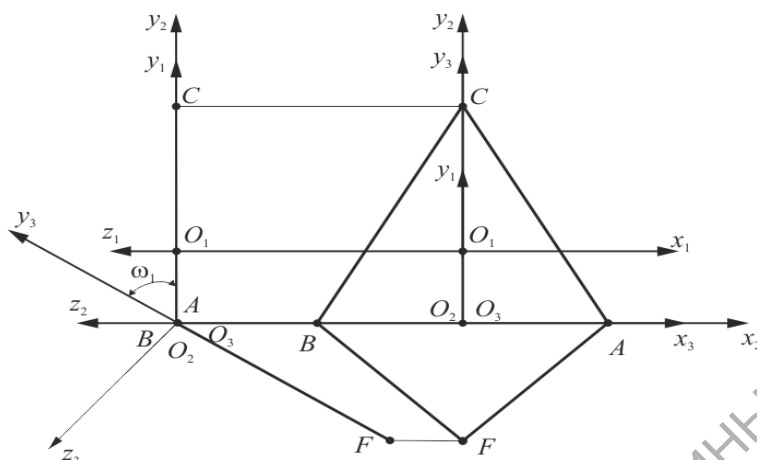


Рисунок 3 – Фрагмент расчетной схемы

Для рассматриваемого в статье механизма, как это следует из рис. 3, положения точек A , B , C в системе координат S_1 запишутся в матричном виде:

$$R_1^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_1^B = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_1^C = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где a – длина стороны равностороннего треугольника ABC .

Тем самым по выражениям (2) с учетом (3) могут быть пересчитаны текущие положения точек A , B , C в трехмерном пространстве в неподвижную систему координат S_0 .

Для нахождения положения точек D , E и F рассмотрим математическое описание топологии отдельной параллельной кинематической цепи, например, AFB , связанной с платформой ABC вращательным соединением AB . Для этого фрагмента, механизма на рис. 3 представлен выбор необходимых систем координат S_2 и S_3 и принятый угол ω_1 , определяющий относительный поворот звена AFD по отношению к звену ABC во вращательном соединении AB . В соответствии с принятым координатным описанием топологии этого фрагмента, (рис. 3) матрицы перехода между соответствующими системами координат S_2 и S_1 , S_3 и S_2 будут иметь вид:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_1 & -\sin \omega_1 & 0 \\ 0 & \sin \omega_1 & \cos \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) полная цепочка матричных преобразований координат положения точки F в систему координат S_0 будет иметь вид:

$$R_0^F = M_{01} M_{12} M_{23} R_3^F, \text{ где } R_3^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Выполнив матричные умножения в соответствии с (5) окончательно получим:

$$R_0^F = \frac{\sqrt{3}}{2} a \begin{bmatrix} a_{12}(\cos \omega_1 + \frac{1}{3}) - a_{13}(\sin \omega_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{14} \\ a_{22}(\cos \omega_1 + \frac{1}{3}) - a_{23}(\sin \omega_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{24} \\ a_{32}(\cos \omega_1 + \frac{1}{3}) - a_{33}(\sin \omega_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{34} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Так как положение точки F ограничено общей плоскостью перемещения точек D , E и F , то есть плоскостью x_0Oy_0 , по которой осуществляется кинематическое замыкание тремя планарными позиционными (рисунок 2), то аналитическое условие этого замыкания имеет вид: $z_0^F = 0$. Или из (6) получим:

$$z_0^F = \frac{\sqrt{3}}{2} a (a_{32}(\cos \omega_1 + \frac{1}{3}) - a_{33}(\sin \omega_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{34}) = 0, \quad (7)$$

Выражение (7) легко приводится к квадратному уравнению относительно $\cos \omega_1$, решение которого имеет вид:

$$\cos \omega_1 = \frac{-M_1 P_1 \pm \sqrt{M_1^2 P_1^2 - (M_1^2 + N_1^2)(P_1^2 - N_1^2)}}{M_1^2 + N_1^2}, \quad (8)$$

где $M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a a_{32}$; $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a a_{33}$; $P_1 = \frac{a a_{32}}{2\sqrt{3}} - a_{34}$.

Подставляя угол ω_1 , найденный из (8), в аналитические выражения первых двух элементов матрицы (6) получим искомые координаты соответственно x_0^F и y_0^F точки F .

Аналитические выражения для координат точек $D(x_D, y_D)$ и $E(x_E, y_E)$ в плоскости статора найдутся из выражений, аналогичных (6) и (7), так как звенья ADC и CEB являются звеньями параллельной кинематической связанности, аналогичной звену AFD. При этом углы ω_2 и ω_3 определяются из условий замкнутости в точках D и F кинематических цепей ADC и CEB.

Таким образом нами получено полное аналитическое решение обратной задачи кинематики рассматриваемой пространственной системы перемещений с шестью степенями свободы.

Дальнейшие параметрические представления полученных в настоящей работе алгоритмов позволяет использовать среду моделирования технических систем MATLAB для получения всех необходимых кинематических характеристик, включая: скорости и ускорения ПЛШД, решение различных траекторных задач, проведение калибровки полученных траекторий и автоматическое формирование динамической модели с выбором оптимальных алгоритмов регулирования.

Список использованных источников

- 1 Карпович, С. Е. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для позиционного технологического оборудования. / С. Е. Карпович, В. В. Жарский, И. В. Дайняк, Е. А. Литвинов. – Минск : Беспринт, 2013. – 208 с.
- 2 Виттенбург, И. Динамика систем твердых тел / И. Виттенбург. – М. : Мир, 1980. – 292 с.
- 3 Карпович, С. Е. Моделирование механизмов параллельной кинематики в среде MATLAB/Simulink / С. Е. Карпович, В. В. Жарский, И. В. Дайняк, Е. А. Литвинов. – Минск : Беспринт, 2013. – 152 с.