Д. А. Ходанович
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

ВЛИЯНИЕ ИНДЕКСОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА *p*-РАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть p – простое число. Группа называется p-замкнутой, если еесиловская p-подгруппа нормальна, и p-нильпотентной, если в группе имеется нормальное дополнение к силовской p-подгруппе. Через $O_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p-подгруппа группы G. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Из теоремы Фробениуса о нормальных дополнениях к силовским подгруппам вытекает, что группа, в которой все собственные подгруппы p-нильпотентны либо сама p-нильпотентна, либо является p-замкнутой группой Шмидта [1, теорема IV.5.4].

В 1954 году Б. Хупперт установил сверхразрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп простые числа [2]. В этой же работе он поставил вопрос о разрешимости группы, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. Положительный ответ на этот вопрос получил Ф. Холл [1, теорема VI.9.4]. Детальное изучение конечных групп с такими индексами максимальных подгрупп осуществлено в работах [3; 4; 5]. Вполне естественно возникает задача изучения строения конечной группы, у которой максимальные подгруппы либо p-нильпотентны (в частности, нильпотентны), либо имеют своим индексом простое число или квадрат простого числа.

В этом направлении доказана

Теорема. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка конечной группы Gи p>3. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то фактор-группа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна.*

Следствие 1. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка конечной группы G. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то группа G p-разрешима и $l_p(G)\leq 2$.*

Здесь $l_p(G)$ – p-длина группы G.

Следствие 2 [6, теорема 4.1]. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима и $G\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.*

Здесь $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ – классы всех нильпотентных и сверхразрешимых групп, $\mathfrak{N}_2$ – класс всех 2-групп, а $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ – их формационное произведение.

Следствие 3 [7, теорема 1.2]. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, то группа G разрешима и либо группа G метабелева, либо G p-нильпотентна и q-замкнута для некоторых простых p и q.*

Пример. В теореме при p=3 фактор-группа $G/O_p(G)$ может быть не 3-нильпотентной. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4.

Список использованных источников

1 Huppert, B. Endliche GruppenI / B. Huppert. – Berlin : Springer, 1967.

2 Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

3 Каморников, С. Ф. К теореме Ф. Холла / С. Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 45–52.

4 Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

5 Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

6 Ходанович, Д. А. О p-разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп / Д. А. Ходанович // Вестник ПГУ. Серия С – «Фундаментальные науки». – 2005. – № 4. – С. 18–22.

7 Lu, J. Finite groups with non-nilpotent maximal subgroups / J. Lu, L. Pang, X. Zhong // Monatsh. math. – 2013. – Vol. 171. – P. 425–431.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ