А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, БелГУТ

КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ВЛОЖЕНИЕМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в ней. В 1969 году Т. О. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение $\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 году Л. А. Шеметков в монографии [2] распространил данное понятие на произвольные конечные группы.

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-субнормальной в G (обозначается H $\boldsymbol{F}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\boldsymbol{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. В случае, когда $\boldsymbol{F}$ совпадает с классом $\boldsymbol{N}$ всех нильпотентных групп, всякая $\boldsymbol{N}$-субнормальная подгруппа является субнормальной, обратное утверждение в общем случае неверно. Однако в разрешимых группах эти понятия эквивалентны.

Еще одно обобщение субнормальности предложил в 1978 году О. Кегель [3], введя понятие $\boldsymbol{F}$-достижимой (K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной, согласно [4, с. 236]) подгруппы.

Подгруппа H группы G называется K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной в G (обозначается H K-$\boldsymbol{F}$-sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i^{\boldsymbol{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, что субнормальная подгруппа является K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной в любой группе, обратное утверждение верно не всегда. Для случая $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$ понятия субнормальной и K-$\boldsymbol{N}$-субнормальной подгрупп эквивалентны.

Свойства $\boldsymbol{F}$-субнормальных и K-$\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения активно изучались в различных направлениях, и нашли отражение в многочисленных работах, в частности, в монографиях [4; 5].

В работе [6] было начато рассмотрение следующей общей задачи. Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Изучить влияние $\boldsymbol{F}$-субнормальных (K-$\boldsymbol{F}$-субнормальных) силовских подгрупп на строение всей группы.

Определение. Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\boldsymbol{F}$ введем классы групп:

$\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ *– класс всех групп* G, *у которых* 1 $\boldsymbol{F}$-sn G *и* Q $\boldsymbol{F}$-sn G *для любой силовской* q*-подгруппы* Q *из* G, *где* $q \in \pi \cap \pi(G)$;

$\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$ *– класс всех групп* G, *у которых* Q K-$\boldsymbol{F}$-sn G *для любой силовской* q*-подгруппы* Q *из* G, *где* $q \in \pi \cap \pi(G)$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

В случае, когда $\pi = \mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, будем обозначать $\mathrm{W}\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{F}$, вместо $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_{\mathbf{P}}\boldsymbol{F}$ соответственно.

В [7] исследовался класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ и все силовские подгруппы являются $\boldsymbol{F}$-субнормальными в G. В частности, для наследственной насыщенной формаци $\boldsymbol{F}$ было доказано, что такой класс групп образует наследственную насыщенную формацию. Также в классе разрешимых групп было установлено ее локальное задание. Легко заметить, что данный класс групп совпадает с $\mathrm{W}\boldsymbol{F}$.

В работах [8; 9; 10] аналогичные результаты были получены для класса всех групп, у которых все силовские подгруппы группы являются K-$\boldsymbol{F}$-субнормальными, т. е. для класса групп $\overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{F}$.

В работах [11] и [12] были введены определения $\mathbf{P}$-субнормальной и K-$\mathbf{P}$-субнормальной подгрупп, которые для формации $\boldsymbol{U}$ всех сверхразрешимых групп являются обобщениями понятий $\boldsymbol{U}$-субнормальной и K-$\boldsymbol{U}$-субнормальной подгрупп соответственно.

Подгруппа H группы G называется $\mathbf{P}$-субнормальной в G, если либо $H=G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Подгруппа H группы G называется K-$\mathbf{P}$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots < H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1,\ldots, n$.

В любой группе всякая $\boldsymbol{U}$-субнормальная подгруппа является $\mathbf{P}$-субнормальной, а для разрешимых групп имеет место и обратное утверждение. Однако в общем случае оно неверно.

Понятие K-$\mathbf{P}$-субнормальной подгруппы шире, чем понятие $\mathbf{P}$-субнормальной подгруппы. Каждая K-$\boldsymbol{U}$-субнормальная в G подгруппа является K-$\mathbf{P}$-субнормальной в G. В общем случае обратное утверждение не выполняется. Например, в знакопеременнной группе A_5 степени 5 силовская 2-подгруппа K-$\mathbf{P}$-субнормальна, но не K-$\boldsymbol{U}$-субнормальна. В разрешимой группе понятия $\boldsymbol{U}$-субнормальной, $\mathbf{P}$-субнормальной, K-$\mathbf{P}$-субнормальной и K-$\boldsymbol{U}$-субнормальной подгрупп эквивалентны [12, лемма 3.4].

В [11] исследовался класс $\mathrm{w}\boldsymbol{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа $\mathbf{P}$-субнормальна в G. В частности, было установлено, что $\mathrm{w}\boldsymbol{U}$ состоит из разрешимых групп, является наследственной насыщенной формацией, найдено ее локальное задание. Из разрешимости групп из $\mathrm{w}\boldsymbol{U}$ следует, что $\mathrm{W}\boldsymbol{U} = \mathrm{w}\boldsymbol{U} = \overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{U}$.

Важность классов $\mathrm{W}\boldsymbol{U}$ и $\overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{U}$ была подчеркнута работами [11; 12; 13; 14; 15], где исследовались их свойства и приложения для изучения произведений групп.

В работе [12] был рассмотрен класс $\overline{\mathrm{w}}_\pi\boldsymbol{U}$ всех групп, у которых все силовские p-подгруппы являются K-$\mathbf{P}$-субнормальными для p из некоторого множества простых чисел π. В частности, установлены некоторые свойства класса групп $\overline{\mathrm{w}}_\pi\boldsymbol{U}$ для множества $p = \mathbf{P}\backslash\{r\}$, r – простое число. Из отмеченных выше свойств K-$\boldsymbol{U}$-субнормальных и K-$\mathbf{P}$-субнормальных подгрупп следует, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{U} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\boldsymbol{U}$.

В связи с полученными результатами возникает следующая естественная

Проблема. Для множества простых чисел π и непустой формации $\boldsymbol{F}$ установить свойства и связь классов групп $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$.

Решению этой проблемы посвящено данное сообщение.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbf{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\pi_1 \subseteq \mathbf{P}$ и $\pi \subseteq \pi_1$, *то* $\mathrm{W}_{\pi_1}\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_{\pi_1}\boldsymbol{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$;

2) $\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{W}\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$ *и* $\pi(\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}) = \pi(\boldsymbol{F})$;

3) $\boldsymbol{N}_{\pi \cap \pi(\boldsymbol{F})} \subseteq \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ *и* $\boldsymbol{N}_\pi \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$;

4) $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F} = \mathrm{W}_{\pi \cap \pi(\boldsymbol{F})}\boldsymbol{F}$;

5) $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$ – *наследственные формации*;

6) $\mathrm{W}_\pi(\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}) = \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi(\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}) = \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$;

7) *если* $\boldsymbol{H}$ – *наследственная формация и* $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{H}$, *то* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{H}$ *и* $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{H}$.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbf{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_{\pi \cup \pi(\boldsymbol{F})} \supseteq \boldsymbol{N}_{\pi \backslash \pi(\boldsymbol{F})} \times \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$;

2) *если* $\pi(\boldsymbol{F}) \subseteq \pi$, *то* $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_\pi = \boldsymbol{N}_{\pi \backslash \pi(\boldsymbol{F})}\} \times \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Следствие 2.1 [10, теорема 2.2]. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная формация и* $\pi = \pi(\boldsymbol{F})$, *то* $\mathrm{W}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_{\pi'} \times \mathrm{W}\boldsymbol{F}$.

Следствие 2.2. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная формация и* $\pi(\boldsymbol{F}) = \mathbf{P}$, *то* $\overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{F} = \mathrm{W}\boldsymbol{F}$.

Заметим, что условие $\pi(\boldsymbol{F}) \subseteq \pi$ в 2) теоремы 3.3 существенно. Например, пусть $\pi = \{7\}$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_{\pi(\boldsymbol{F})}$, где $\pi(\boldsymbol{F}) = \{2, 3, 5, 7\}$, и $G = A_5$ – знакопеременная группа на 5 символах. Тогда $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$. Из $G = G^{\boldsymbol{F}}$ следует, что $G \notin \mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$.

Теорема 3. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация и* $\pi \subseteq \mathbf{P}$. *Тогда* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ *является наследственной насыщенной формацией*.

Следствие 3.1 [7, теорема B]. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация. Тогда* $\mathrm{W}\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация*.

Следствие 3.2. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация, то класс групп с* $\boldsymbol{F}$*-субнормальной единичной подгруппой является наследственной насыщенной формацией*.

Пусть $\boldsymbol{F}$ – локальная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbf{P}$. Для любого простого p обозначим через $h_\pi{}^*(p)$ следующий класс групп: $h_\pi{}^*(p) = (G \mid 1\ \boldsymbol{F}\text{-sn}\ G,\ Q\ \boldsymbol{F}\text{-sn}\ G$ и $Q \in h(p)$ для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G))$.

Если $\pi = \mathbf{P}$, то вместо $h_\pi{}^*(p)$будем писать $h^*(p)$.

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран и* $\pi \subseteq \mathbf{P}$. *Тогда* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F} = \mathrm{LF}(f)$, *где* f *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ такой, *что* $f(p) = h_\pi{}^*(p)$, *если* $p \in \pi(\boldsymbol{F})$; $h_\pi{}^*(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbf{P} \setminus \pi(\boldsymbol{F})$.

Следствие 4.1. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран и* $\pi \subseteq \pi(\boldsymbol{F}) = \mathbf{P}$. *Тогда* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F} = \mathrm{LF}(h_\pi{}^*)$, *где* $h_\pi{}^*$ *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$.

Следствие 4.2. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда* $\mathrm{W}\boldsymbol{F} = \mathrm{LF}(f)$, *где* f *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\mathrm{W}\boldsymbol{F}$ *такой, что* $f(p) = h^*(p)$, *если* $p \in \pi(\boldsymbol{F})$; $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbf{P} \setminus \pi(\boldsymbol{F})$.

Следствие 4.3. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран и* $\pi(\boldsymbol{F}) = \mathbf{P}$, *то* $\mathrm{W}\boldsymbol{F} = \mathrm{LF}(h^*)$, *где* h^* *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\mathrm{W}\boldsymbol{F}$.

Согласно [16, гл. IV, пример 3.4 (f)] формация $\boldsymbol{U}$ всех сверхразрешимых групп имеет внутренний локальный экран f такой, что $f(p)=\boldsymbol{A}(p\text{-}1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $(p\text{-}1)$, для любого простого p. Ввиду леммы 1.6 формация $\boldsymbol{U}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h такой, что $h(p)= \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{A}(p\text{-}1)$. В работе [11] был найден локальный экран формации $\mathrm{w}\boldsymbol{U}$, который не является максимальным внутренним. Используя теорему 3.6, нетрудно найти максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\boldsymbol{U}$.

Следствие 4.4. *Формация* $\mathrm{w}\boldsymbol{U} = \mathrm{W}\boldsymbol{U} = \overline{\mathrm{W}}\,\boldsymbol{U}$ *имеет максимальный внутренний локальный экран* h^* *такой, что* $h^*(p) = (G \mid Q$ $\mathbf{P}$*-субнормальна в* G *и* $Q \in \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{A}(p\text{-}1)$ *для всякой силовской подгруппы* Q *группы* G) *для любого простого* p.

Теорема 5. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная формация и* $\pi(\boldsymbol{F}) \subseteq \pi$, *то* $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_\pi$ *– наследственная насыщенная формация*.

Следствие 5.1 [10, следствие 2.3]. *Если* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация, то* $\overline{\mathrm{W}}\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация*.

Теорема 6. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран и* $\pi(\boldsymbol{F}) \subseteq \pi$. *Тогда* $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_\pi = \mathrm{LF}(g)$, *где* g *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}_\pi$ *такой, что* $g(p) = h_\pi{}^*(p)$, *если* $p \in \pi(\boldsymbol{F})$; $g(p) = \boldsymbol{N}_p$, *если* $p \in \pi \setminus \pi(\boldsymbol{F})$; $g(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbf{P} \setminus (\pi \cup \pi(\boldsymbol{F}))$.

Теорема 5 позволяет строить новые примеры насыщенных формаций.

Предложение 7. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда* $\mathrm{W}(\boldsymbol{NA}) = \overline{\mathrm{W}}\,(\boldsymbol{NA}) = \boldsymbol{N}\mathrm{A}$.

Список использованных источников

1 Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.

2 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 278 с.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Kegel, O. H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O. H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.

4 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer-Verl, 2006. – 385 p.

5 Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Минск : Бел. навука, 2003. – 254 с.

6 Васильев, А. Ф. О влиянии примарных ***F***-субнормальных подгрупп на строение группы / А. Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

7 Васильев, А. Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4. – С. 86–91.

8 Васильева, Т. И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т. И. Васильева, А. И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.

9 Вегера, А. С. О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп / А. С. Вегера // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2012. – № 6. – С. 154–158.

10 Вегера, А. С. О конечных группах с заданными K-***F***-субнормальными силовскими подгруппами / А. С. Вегера // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3. – С. 53–57.

11 Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

12 Васильев, А. Ф. О K-**P**-субнормальных подгруппах конечных групп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

13 Васильев, А. Ф. О произведениях **P**-субнормальных подгрупп в конечных группах / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сибирский матем. журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

14 Monakhov, V. S. Finite groups with **P**-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

15 Ballester-Bolinches, A. Some Results on Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, A. A. Heliel, M. M. Al-Shomrani // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. DOI 10.1007/s40840-015-0111-7.

16 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ