П. П. Вересович
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \frac{a_4(t)x^4 + a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)}{1 + b(t)x}, \tag{1}$$

в котором $a_j = a_j(t)\ (j = 1, 2, 3, 4),\ b = b(t),\ b(0) \neq 0$ есть непрерывные $2\omega-$периодические функции.

В дальнейшем для любой функции $f(t)$ будем считать $f = f(t),\ \overline{f} = f(-t),\ \dot{f} = \dfrac{df}{dt}.$

Выясним условия, при которых отражающая функция В. И. Мироненко уравнения (1) ([1, с. 11; 2, с. 62]) определяется соотношением

$$2F(t,x) + \overline{b}F^2(t,x) = 2x + bx^2. \tag{2}$$

Лемма. *Для того, чтобы отражающая функция уравнения (1) определялась равенством (2) для коэффициентов этого уравнения достаточно выполнения тождеств*

$$\begin{gathered} a_0 + \overline{a}_0 \equiv 0,\ a_3\overline{b} - 4\overline{a}_4 \equiv 0,\ a_3\overline{b}^2 + 4\overline{a}_4 b \equiv 0,\ \overline{a}_3\overline{b} - 4\overline{a}_4 \equiv 0,\ a_4\overline{b}^2 + \overline{a}_4 b^2 \equiv 0, \\ 4\overline{a}_3\overline{b} - 8\overline{a}_4 - 2\overline{a}_2\overline{b}^2 + \overline{a}_1\overline{b}^3 - \overline{b}^2\dot{\overline{b}} \equiv 0,\ 8\overline{a}_4 - 4\overline{a}_3\overline{b} + 2\overline{a}_2\overline{b}^2 + \overline{a}_1\overline{b}^3 + \overline{b}^2\dot{\overline{b}} \equiv 0, \\ 8\overline{a}_4\overline{b} + 8\overline{a}_4 b - 4\overline{a}_3\overline{b}b + 2\overline{a}_2\overline{b}^2 b + 2a_2\overline{b}^3 + \overline{b}^2 b\dot{\overline{b}} + \overline{b}^3\dot{b} \equiv 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство. Известно ([1, с. 11; 2, с. 63]), что функция $F := F(t,x)$ является отражающей функцией дифференциальной системы $\dot{x} = X(t,x)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0 \qquad (4)$$

и начальному условию $F(0,x) \equiv x$.

Дифференцируя равенство (2) по t и x находим соответственно $F_t(t,x) = \dfrac{\dot{b}x^2 + \dot{\bar{b}}F^2}{2(1+\bar{b}F)}$, $F_x(t,x) = \dfrac{1+bx}{1+\bar{b}F}$ и, после подстановки в (4) с учетом правой части уравнения (1), получим

$$\frac{\dot{b}x^2 + \dot{\bar{b}}F^2}{2(1+\bar{b}F)} + \frac{1+bx}{1+\bar{b}F}\,\frac{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{1+bx} + \frac{\bar{a}_4F^4 + \bar{a}_3F^3 + \bar{a}_2F^2 + \bar{a}_1F + \bar{a}_0}{1+\bar{b}F} \equiv 0.$$

В полученном выражении F^2 заменим на $(2x + bx^2 - 2F)/\bar{b}$. После соответствующих преобразований в новом тождестве вместо F^2 снова подставим $(2x + bx^2 - 2F)/\bar{b}$. Приводя к общему знаменателю, получим равенство

$$P(t,x)F + Q(t,x) = 0, \qquad (5)$$

где

$$P(t,x) := 2(4\bar{a}_3\bar{b} - 8\bar{a}_4 - 2\bar{a}_2\bar{b}^2 + \bar{a}_1\bar{b}^3 - \bar{b}^2\dot{\bar{b}}) + 4\bar{b}(\bar{a}_3\bar{b} - 4\bar{a}_4)x + 2\bar{b}b(\bar{a}_3\bar{b} - 4\bar{a}_4)x^2$$

$$Q(t,x) := 2\bar{b}^3(a_0 + \bar{a}_0) + 2(8\bar{a}_4 - 4\bar{a}_3\bar{b} + 2\bar{a}_2\bar{b}^2 + \bar{a}_1\bar{b}^3 + \bar{b}^2\dot{\bar{b}})x +$$

$$+(8\bar{a}_4\bar{b} + 8\bar{a}_4b - 4\bar{a}_3\bar{b}b + 2\bar{a}_2\bar{b}^2b + 2a_2\bar{b}^3 + \bar{b}^2b\dot{\bar{b}} + \bar{b}^3\dot{b})x^2 +$$

$$+2\bar{b}(a_3\bar{b}^2 + 4\bar{a}_4b)x^3 + 2\bar{b}(a_4\bar{b}^2 + \bar{a}_4b^2)x^4 = 0.$$

Очевидно, что для тождественного выполнения равенства (5) достаточно равенства нулю коэффициентов многочленов $P(t,x)$ и $Q(t,x)$.

Теорема. *Для $2\omega-$периодичности всех решений уравнения (1), достаточно чтобы коэффициенты этого уравнения удовлетворяли условиям;*

а) функции a_0 и a_1 не четные; б) $a_3b \equiv 4a_4$; в) $\bar{a}_4b^2 + a_4\bar{b}^2 \equiv 0$ $(\bar{a}_3b + a_3\bar{b} \equiv 0)$;

г) $2\bar{a}_2\bar{b} + \overline{b\dot{b}} - 2\bar{a}_3 + a_1\bar{b}^2 \equiv 0$.

Доказательство. Первое тождество из (3) дает первое из условий а) теоремы. Второе и четвертое тождества из (3) совпадают. Заменив t на $-t$, получим условие б). Третье тождество из (3) умножим на b и, учитывая условие б), приходим к условию в), совпадающему с пятым тождеством из (3). Сложив шестое и седьмое тождества, приходим к тождеству $\bar{b}^3(a_1 + \bar{a}_1) \equiv 0$, из которого следует нечетность a_1. С учетом $\bar{a}_3\bar{b} \equiv 4\bar{a}_4$ седьмое тождество из (3) дает условие г). Восьмое тождество из (3) справедливо в силу выполнения условий а) – г), так как

$$(8\bar{a}_4\bar{b} + 8\bar{a}_4b - 4\bar{a}_3\bar{b}b + 2\bar{a}_2\bar{b}^2b + 2a_2\bar{b}^3 + \bar{b}^2b\dot{\bar{b}} + \bar{b}^3\dot{b})b \equiv$$

$$\equiv \bar{b}^3(2a_2b - 2a_3 + b\dot{b} - a_1b^2) + \bar{b}b^2(2\bar{a}_2\bar{b} - 2\bar{a}_3 + \overline{b\dot{b}} + a_1\bar{b}^2) \equiv 0.$$

Если отражающая функция $F(t,x)$ $2\omega-$периодической дифференциальной системы $\dot{x} = X(t,x)$ известна, то начальные данные $2\omega-$периодических решений этой системы (основная лемма [1, с.12; 2, с.65]) определяются недифференциальной системой $F(-\omega,x) = x$. Учитывая этот факт и определение равенством (2) отражающей функции уравнения (1) убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

В случае $P(t,x) \neq 0$ вопрос об условиях существования отражающей функции, определяемой равенством (2), остается открытым.

Список использованных источников

1 Мироненко, В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И.Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.

2 Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.