Ю. Е. Дудовская, О. В. Якубович
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

СЕТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ТИПАМИ ЗАЯВОК И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ РЕЖИМОВ В ОТДЕЛЬНЫХ УЗЛАХ

В работе рассматривается открытая сеть массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок, экспоненциальным обслуживанием и марковской маршрутизацией. Заявки, циркулирующие в сети, могут быть различных типов. Узлы функционируют в нескольких режимах, отвечающих различной степени их работоспособности. Время переключения с одного режима работы в другой имеет показательное распределение, переключение возможно только в соседние режимы, а в отдельных узлах при определенном количестве заявок в узле. Во время переключения режимов число заявок в узлах не меняется. Устанавливаются условия эргодичности, достаточные условия существования и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний в мультипликативной форме.

1 *Постановка задачи.*

В сеть, состоящую из N узлов, поступает простейший поток заявок с параметром λ. Заявки могут быть M типов. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}$, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p_{0(i,u)}=1$. Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right)$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_i(t)=\left(\overline{x}_i(t),l_i(t)\right)=\left(x_{i1}(t),x_{i2}(t),\ldots,x_{in(i)}(t),l_i(t)\right)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $x_{i1}(t)$ – тип заявки, которая находится на обслуживании, $x_{ih}(t)$ – тип заявки, которая находится $(h-1)$-ой $\left(h=\overline{2,n(i)}\right)$ в очереди, $n(i)$ – число заявок в i-ом узле, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла в момент времени t. Процесс $x_i(t)$ имеет пространство состояний

$$X_i=\left\{\left(\overline{x}_i,l_i\right)=\left(0,l_i\right),\left(x_{i1},l_i\right),\left(x_{i1},x_{i2},l_i\right),\ldots : x_{ik}=\overline{1,M}, k\ge 1, l_i=\overline{0,r_i}\right\}.$$

Пусть длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления, независимы между собой. Длительность обслуживания заявки в i-ом узле, находящемся в состоянии $x_i\in X_i$, имеет показательное распределение с параметром $\mu_i\left(n(i),l_i\right)$.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i=\left(\overline{x}_i,l_i\right)$, в режиме l_i $\left(l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)$ i-ый узел переходит в (l_i+1)-ый режим $\left(l_i=\overline{0,r_i-1}\right)$, а с интенсивностью $\phi_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)$ – в (l_i-1)-ый режим $\left(l_i=\overline{1,r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Предположим, что переключение режимов в i-ом узле возможно только при определенном количестве заявок в узле $\left(i=\overline{1,K}, K\le N\right)$. Пусть для каждого такого узла i $\left(i=\overline{1,K}\right)$ существует значение $M(i)\ge 0$ такое, что интенсивности $\nu_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)>0$, $\phi_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)>0$ для всех $n(i)\ge M(i)$ и $\nu_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)=0$, $\phi_i\left(\overline{x}_i,l_i\right)=0$ для $n(i)<M(i)$.

Заявка типа u после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть,

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(i,u)(j,v)}+p_{(i,u)0}=1,\quad i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}.$$

Предполагается, что матрица маршрутизации $\left(p_{(i,u)(j,v)}: i,j=\overline{1,N}; u,v=\overline{1,M}\right)$, где $p_{(0,u)(0,v)}=0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_{iu}=p_{0(i,u)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\varepsilon_{jv}p_{(j,v)(i,u)}, \quad i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}. \tag{1}$$

Полученная система уравнений имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_{iu}, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}\right)$, что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [1].

Процесс $x(t)$ является однородным марковским процессом с непрерывным временем и пространством состояний $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_N$, где X_i – пространство состояний i-го узла.

2 *Стационарное распределение сети*

Рассмотрим изолированный i-ый узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, т. к. в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступают M независимых простейших потоков заявок с интенсивностями $\lambda\varepsilon_{i1}, \lambda\varepsilon_{i2}, \ldots, \lambda\varepsilon_{iM}$, где $\left(\varepsilon_{iu}, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}\right)$ – решение системы уравнений трафика (1). Обозначим через $\alpha_{iu}=\lambda\varepsilon_{iu}$ интенсивность поступления заявок типа u в i-ый узел, $\alpha_i=\lambda\sum_{u=1}^{M}\varepsilon_{iu}$ – суммарная интенсивность поступления заявок в i-ый узел.

Пусть $\left\{p_i(x_i), x_i\in X_i\right\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x_i(t)$. Предположим, что i-ый узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\begin{gathered}\alpha_{ix_{in(i)}}p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)-1}, l_i\right)=\mu_i\left(n(i), l_i\right)p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i\right),\\ \nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i-1\right)p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i-1\right)=\\ =\phi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i\right)p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i\right),\\ n(i)\neq 0, l_i=\overline{1,r_i}, i=\overline{1,N}.\end{gathered}$$

Для узлов с номером $i=\overline{1,K}$ при $0<n(i)<M(i)$, второе условие является тождеством $0=0$.

Лемма. Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{gathered}\nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i-1\right)\mu_i\left(n(i), l_i\right)\phi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)-1}, l_i\right)=\\ =\nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)-1}, l_i-1\right)\mu_i\left(n(i), l_i-1\right)\varphi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, l_i\right),\\ l_i=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,N}.\end{gathered} \tag{2}$$

Для узлов с номером $i=\overline{1,K}$ условие (2) накладывается для $n(i)\geq M(i)$.

При выполнении (2) для эргодичности процесса $x_i(t)$ достаточно, чтобы для узлов $i=\overline{1,K}$ сходился ряд

$$\sum_{n(i)=M(i)}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i}q(x_i)\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b-1\right)}{\phi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b\right)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)},$$

а для узлов $i=\overline{K+1,N}$ сходился ряд

$$\sum_{x_i\in X_i}q(x_i)\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b-1\right)}{\phi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b\right)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)},$$

где $q(x_i)=\alpha_i+\mu_i(n(i),l_i)I_{(n(i)\neq 0)}+\nu_i(x_i)I_{(l_i\neq r_i)}+\phi_i(x_i)I_{(l_i\neq 0)}$ – интенсивность выхода из состояния x_i. Стационарное распределение процесса $x_i(t)$ определяется соотношениями

$$p_i(x_i)=\prod_{a=n(i)+1}^{M(i)}\frac{\mu_i(a,l_i)}{\alpha_{ix_{ia}}}\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM(i)},b)}\prod_{c=1}^{M(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}p_i(0) \quad (3)$$

для $0\le n(i)<M(i), i=\overline{1,K}$;

$$p_i(x_i)=\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}p_i(0) \quad (4)$$

для $n(i)\ge M(i), i=\overline{1,K}$ или $i=\overline{K+1,N}$.

Здесь произведение, в котором нижний индекс больше верхнего, равно единице. Состояние 0 – это такое состояние узла, когда в нем отсутствуют заявки, и узел функционирует в нулевом режиме. Вероятность указанного состояния имеет вид

$$p_i(0)=\left[\sum_{n(i)=0}^{M(i)-1}\sum_{l_i=0}^{r_i}\prod_{a=n(i)+1}^{M(i)}\frac{\mu_i(a,l_i)}{\alpha_{ix_{ia}}}\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM(i)},b)}\prod_{c=1}^{M(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n(i)=M(i)}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i}\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}\right]^{-1},\quad i=\overline{1,K},$$

$$p_i(0)=\left[\sum_{x_i\in X_i}\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}\right]^{-1},\quad i=\overline{K+1,N}.$$

Теорема. Если для всех $i=\overline{1,N}$ выполняются условия обратимости (2) и сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{n(i)=M(i)}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i}q(x_i)\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)}+$$

$$+\sum_{i=K+1}^{N}\sum_{x_i\in X_i}q(x_i)\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b-1)}{\phi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in(i)},b)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c,0)},$$

то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_N(x_N),\quad x\in X,$$

где $p_i(x_i)$ определяется по формулам (3)–(4).

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера [2]. Исследованная сеть массового обслуживания является частным случаем сети с многорежимным обслуживанием, когда переключение режимов возможно при любом количестве заявок в узле [3].

Список использованных источников

1 Jackson, J. R. Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

2 Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания : учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

3 Летунович, Ю. Е. Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием / Ю. Е. Летунович // Современные информационные компьютерные технологии : сб. науч. статей междунар. науч. конф. – Гродно, 2008. – С. 97–99.