С. П. Жогаль, С. И. Жогаль, И. В. Сафонов
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины
г. Гомель, БелГУТ
г. Минск, ЕРАМ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВНЕШНЕМУ БИГАРМОНИЧЕСКОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Большинство реальных колебательных систем различной природы принципиально нелинейны и поэтому, как правило, они не интегрируются в квадратурах. В теории и приложениях нелинейной динамики применяются различные методы, позволяющие с той или иной степенью точности и при определенных допущениях находить приближенные решения таких систем: метод малого параметра, метод гармонического баланса, метод прямой линеаризации и ряд других. Наиболее широко при исследовании слабонелинейных колебательных систем применяются асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [1] и методы линеаризации, например метод линеаризации по функции распределения [3; 4].

Исследуем вопрос о точности приближенных решений, полученных методом линеаризации по функции распределения и методом Крылова-Боголюбова-Митропольского, для следующей нелинейной системы, подверженной влиянию внешнего бигармонического воздействия

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\beta x+\gamma x^3=h_1\cos\omega_1 t+h_2\cos\omega_2 t, \tag{1}$$

где α, β, h_1, h_2 – положительные постоянные, γ – вещественная постоянная любого знака.

При компьютерном моделировании динамических систем в большинстве современных прикладных исследований используется такой достаточно точный численный метод, как метод Рунге-Кутта. Поэтому сравним приближенные результаты исследования системы (1) по методам Крылова-Боголюбова-Митропольского и линеаризации по функции распределения с результатами непосредственного численного интегрирования методом Рунге-Кутта, принимая последний в качестве эталонного [2, с. 104].

1.1 *Метод Крылова-Боголюбова-Митропольского*

Для применимости асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского мы должны предположить, что в (1) $\alpha<<\sqrt{\beta}$, $\gamma<<\sqrt{\beta}$, $h_k<<\beta$, $k=1,2$. При $\gamma>0$ имеем систему с «жесткой» восстанавливающей силой, при $\gamma<0$ – систему с «мягкой» восстанавливающей силой.

Решение уравнения (1) для установившегося режима колебаний в первом приближении метода ищем в виде

$$x(t)=a_1(t)\cos[\omega_1+\varphi_1(t)]+a_2(t)\cos[\omega_2+\varphi_2(t)],$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – медленно изменяющиеся функции времени, которые определяются из системы уравнений:

$$\frac{da_1}{dt}=P_1(a_1,a_2,\varphi_1,\varphi_2),\quad \frac{da_2}{dt}=P_2(a_1,a_2,\varphi_1,\varphi_2),$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt}=Q_1(a_1,a_2,\varphi_1,\varphi_2),\quad \frac{d\varphi_2}{dt}=Q_2(a_1,a_2,\varphi_1,\varphi_2).$$

На основании [1], определяя функции P_1, P_2, Q_1, Q_2, для амплитуд и фаз получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{da_1}{dt}=-\frac{1}{2\omega_1}\{\alpha\omega_1 a_1+h_1\sin\varphi_1\},\\
\frac{da_2}{dt}=-\frac{1}{2\omega_2}\{\alpha\omega_2 a_2+h_2\sin\varphi_2\},\\
\frac{d\varphi_1}{dt}=-\frac{1}{2\omega_1 a_1}\left\{\frac{3\gamma}{4}a_1\left(a_1^2+2a_2^2\right)+\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)a_1-h_1\cos\varphi_1\right\},\\
\frac{d\varphi_2}{dt}=-\frac{1}{2\omega_2 a_2}\left\{\frac{3\gamma}{4}a_2\left(a_2^2+2a_1^2\right)+\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)a_2-h_2\cos\varphi_2\right\}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Начальные условия определяем из системы:

$$\begin{gathered}
\alpha\omega_1 a_1^0+h_1\sin\varphi_1^0=0;\\
\alpha_2^0\omega_2 a_2^0+h_2\sin\varphi_2^0=0;\\
a_1^0(\omega_0^2-\omega_1^2)-h_1\cos\varphi_1^0=0;\\
a_2^0(\omega_0^2-\omega_2^2)-h_2\cos\varphi_2^0=0.
\end{gathered}$$

После задания численных значений параметров α, β, γ, ω_i, h_i, $i=1,2$, систему (2) интегрируем одним из известных численных методов.

1.2 *Метод линеаризации по функции распределения*

Сущность метода линеаризации по функции распределения [3] заключается в замене нелинейности $f(x)=\beta x+\gamma x^3$ уравнения (1) на некоторую линейную функцию $f^*(x)=qx+f_0$. Для определения параметров колебательного процесса необходимо решить линеаризованное уравнение, полученное при такой замене.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$x=a_0+a_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+a_2\cos(\omega_2 t+\psi_2). \tag{3}$$

Коэффициенты линеаризации q и f_0 являются функциями моментных характеристик решения (3), то есть среднего значения a_0, центрального момента второго порядка

$$M_2^{(0)}=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2\right) \tag{4}$$

и центрального момента четвертого порядка

$$M_4^{(0)}=\frac{3}{2}\left[M_2^{(0)}\right]^2+\frac{3}{4}a_1^2a_2^2. \tag{5}$$

Зависимости коэффициентов линеаризации от моментов решения имеет вид

$$f_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2} f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + \frac{1}{2} f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + (\varepsilon - 1) f(a_0)\right]; \qquad (6)$$

$$q = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) - f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right)\right], \qquad (7)$$

где $\sigma = \sqrt{M_2^{(0)}}$, $\varepsilon = \dfrac{M_4^{(0)}}{\left[M_2^{(0)}\right]^2}$.

Решение линеаризованного уравнения для системы (1)

$$f_0 = 0, \quad a_k = \frac{h_k}{\sqrt{\left(q - \omega_k^2\right)^2 + \alpha^2\omega_k^2}}, \quad k = 1,2. \qquad (8)$$

Из (4)–(8) получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров a_0, σ, ε:

$$\frac{1}{2} f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + \frac{1}{2} f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + (\varepsilon - 1) f(a_0) = 0; \qquad (9)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{h_1^2}{(q - \omega_1^2)^2 + \alpha^2\omega_1^2} + \frac{h_2^2}{(q - \omega_2^2)^2 + \alpha^2\omega_2^2}\right]; \qquad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} + \frac{3}{4\sigma^2}\frac{h_1^2 h_2^2}{((q - \omega_1^2)^2 + \alpha^2\omega_1^2)((q - \omega_2^2)^2 + \alpha^2\omega_2^2)}. \qquad (11)$$

1.3 *Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения и сравнение полученных результатов*

Приведем графики приближенных решений, полученных методом Крылова-Боголюбова-Митропольского и методом линеаризации по функции распределения для следующих значений параметров системы (1): $\alpha = 1$, $\beta = \omega_0^2 = 3600$, $\gamma = 3$, $h_1 = 5$, $h_2 = 1$, $\omega_1 = 55$, $\omega_2 = 65$. Тонкой линией на обоих графиках приведено решение нелинейного дифференциального уравнения (1) с заданными значениями параметров методом Рунге-Кутта.

Рисунок 1 – Метод Рунге-Кутта и метод линеаризации по функции распределения

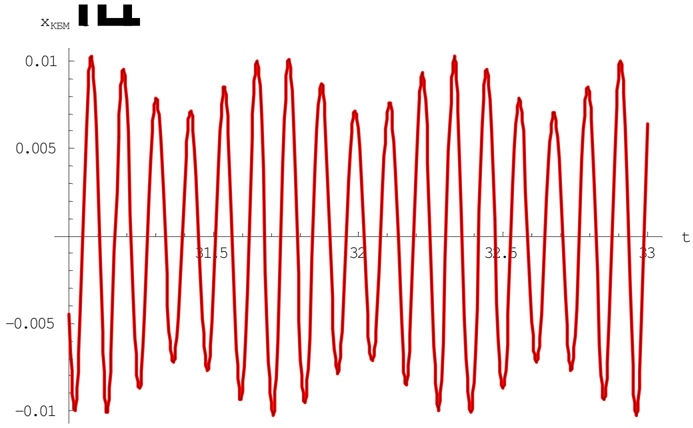

Рисунок 2 – Метод Рунге-Кутта и метод Крылова-Боголюбова-Митропольского

Для численной оценки точности методов введем в рассмотрение величины

$$\Delta_{MET} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{PK}^{i}(t) - x_{MET}^{i}(t)\right)^2, \qquad (12)$$

где $x_{PK}^{i}(t)$ – компонента решения по методу Рунге-Кутта, $x_{MET}^{i}(t)$ – компонента решения по методу *MET* (в нашем случае это либо метод Крылова-Боголюбова-Митропольского, либо метод линеаризации по функции распределения), *N* – количество точек, в которых вычисление проводилось.

Для *N*=600 получены следующие оценки:

$$\Delta_{КБМ} = 1.70835\times10^{-12}, \quad \Delta_{ЛФР} = 5.00253\times10^{-6}.$$

Дальнейший анализ показал, что вблизи резонансных областей вида $\omega_0 \approx \frac{p_i}{q_i}\omega_i$, где p_i q_i – небольшие положительные целые числа, большей точностью обладает метод Крылова-Боголюбова-Митропольского ($\Delta_{КБМ} \in \left[10^{-17};10^{-11}\right], \Delta_{ЛФР} \in \left[10^{-10};10^{-4}\right]$). В то же время, когда собственная частота колебаний системы и частоты внешних воздействий несоизмеримы, оба метода показывают практически одинаковые результаты (обе погрешности порядка 10^{-17}). Также следует отметить большую устойчивость точности метода Крылова-Боголюбова-Митропольского к изменениям параметров системы.

Таким образом, для слабонелинейной системы с внешним бигармоническим воздействием (1) методом компьютерного моделирования подтвердилось предположение о том, что асимптотический метод нелинейной механики, разработанный Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским, представляет собой одно из наиболее мощных средств приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений. Кроме того, на основе системы (2) этот метод позволяет проводить качественный анализ процессов, протекающих в динамических системах колебательного типа.

Список использованных источников

1 Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – 4-е изд. – М. : Наука, 1974. – 504 с.

2 Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. – М. : Наука, 1990. – 312 с.

3 Коловский, М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М. З. Козловский. – М. : Наука, 1966. – 317 с.

4 Колебания нелинейных механических систем : в 6 т. / под ред. И. И. Блехмана. – М. : Машиностроение, 1979. – Т. 2. Вибрации в технике : справочник. – 351 с.

5 Ланда, П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П. С. Ланда. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.