УДК 535.42+537.86.22

# ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

**С.С. Гиргель**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

# POLARIZABLE AND ENERGY PROPERTIES OF THE VECTOR PARAXIAL GAUSSIAN LIGHT BEAMS

**S.S. Girgel**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Найдены и исследованы поляризация и плотность потока энергии электромагнитного поля для векторных параксиальных гауссовых световых пучков с однородной и неоднородной поляризацией различных видов. Описаны несколько новых типов векторных параксиальных гауссовых световых пучков, например, пучки со спиральной эллиптической поляризацией.

***Ключевые слова***: *параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, гауссовы пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, неоднородная поляризация.*

Polarization and energy flux density of an electromagnetic field for the vector paraxial Gaussian light beams with the homogeneous and nonhomogeneous polarization of various types are discovered and explored. Some new types of the vector paraxial Gaussian light beams, for example, beams with spiral elliptic polarization are featured.

***Keywords***: *paraxial beams, vector beams, light beams, Gaussian beams, polarizable properties, energy properties, nonhomogeneous polarization.*



### *Введение*

Узконаправленные электромагнитные пучки находят широкое применение в науке и технике [1]–[10]. Векторным световым пучкам с гауссовой огибающей посвящены многочисленные публикации. Несмотря на это, здесь еще осталось много нерешенных проблем. В предыдущих работах автора был предложен общий формализм для аналитического описания векторных параксиальных пучков с однородной [8] и неоднородной [9] поляризацией. В настоящей работе этот формализм применяется для изучения поляризационных и энергетических свойств векторных параксиальных гауссовых световых пучков нескольких видов.

### *1 Общий формализм для описания векторных параксиальных пучков*

Общее электрическое поле векторных параксиальных монохроматических пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}e^{i(kz-\omega t)}, \qquad (1.1)$$

где, однако, векторная амплитуда $\mathbf{E}$ не является постоянной, а зависит от координат $x$, $y$, $z$. Параксиальные пучки однозначно определяются поперечной частью $\mathbf{E}_\perp$ вектора электрического поля. Целесообразно рассматривать одновременно пучки двух типов:

$$\mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}_\perp^{(1)}+\frac{i}{k}\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(1)}e_z;\quad \mathbf{H}^{(1)}=\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)};\qquad (1.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}=[\mathbf{e}_z,\mathbf{E}_\perp^{(1)}]+\frac{i}{k}\nabla_\perp[\mathbf{e}_z\mathbf{E}_\perp^{(1)}]\mathbf{e}_z;\quad \mathbf{H}^{(2)}=-\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)}. \quad (1.3)$$

Верхние индексы $^{(1)}$ и $^{(2)}$ здесь и далее означают пучки первого и второго типов. $\nabla_\perp=\mathbf{e_x}\partial_x+\mathbf{e}_y\partial_y$ – векторный поперечный оператор набла; $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси $z$ пучка, $n$ – показатель преломления среды. Используются обозначения: $k_0=\omega/c$, $n^2=\varepsilon\mu$, $k=k_0n$.

В (1.2)–(1.3) векторы электрических полей $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ взаимосвязаны: ($\mathbf{E}_\perp^{(2)}=[\mathbf{e}_z\mathbf{E}_\perp^{(1)}]$). Поэтому такие пучки называем сопряженными друг другу.

Перейдем к поляризационным характеристикам пучков $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$. Предварительно отметим, что $\mathbf{E}_\perp^{(1)}\mathbf{E}_\perp^{(2)}=0$. Это означает, что векторы $\mathbf{E}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$ имеют одинаковую эллиптичность, а направления главных осей эллипсов поляризации отличаются на $90^0$. Поляризационные и энергетические характеристики сопряженных пучков аналогичны. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться, как правило, анализом только одного из двух сопряженных пучков.

Запишем выражения для вычисления поляризации параксиальных сопряженных векторных пучков типа $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}_\perp^{(2)}$. Для этого разложим поперечные векторы $\mathbf{E}_\perp$ по ортогональному декартову базису ($\mathbf{E}_\perp=E_x\mathbf{e}_x+E_y\mathbf{e}_y$):

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + \frac{i}{k}(\partial_x E_x + \partial_y E_y)\mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)}; \qquad (1.4)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = E_x\mathbf{e}_y - E_y\mathbf{e}_x + \frac{i}{k}(\partial_y E_x - \partial_x E_y)\mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)} \qquad (1.5)$$

и введем комплексный параметр поляризации соотношением $\eta = \eta' + \eta'' = E_y / E_x$. Если теперь ввести комплексный угол $(\psi' + \psi'')$ соотношением $\eta = \mathrm{tg}(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен $\psi'$, а ее эллиптичность $\gamma$ выражается как $\gamma = \mathrm{th}\,\psi''$. При численных расчетах можно также пользоваться формулами [11]–[12]:

$$\mathrm{tg}\,2\psi' = \frac{2\eta'}{1-|\eta|^2}; \quad \mathrm{th}\,2\psi'' = \frac{2\eta''}{1+|\eta|^2}.$$

Если параметр $\eta$ является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [8].

Усредненные по времени плотность энергии $w$ и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) [5], [7]

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}|\mathbf{E}|^2; \quad \mathbf{S} = \frac{\mathrm{c}}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}]$$

для сопряженных параксиальных пучков являются одинаковыми:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}|\mathbf{E}_\perp|^2; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_z\,\mathbf{e}_z; \quad S_z = \frac{c}{n}w; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{\mathrm{c}\varepsilon}{8\pi nk}\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_\perp^{(1)*}\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(1)} + \mathbf{E}_\perp^{(2)*}\cdot\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp^{(2)}\right). \quad (1.7)$$

Часто целесообразно, следуя Бекшаеву [14], [15] и Бэрри [16], поперечный поток энергии $\mathbf{S}_\perp$ разделить явно на орбитальный $\mathbf{S}_0$ и спиновый $\mathbf{S}_s$ потоки соответственно соотношениями

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_s = \qquad (1.8)$$

$$= \frac{c\varepsilon}{8\pi nk}\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_\perp^{(1)*}(\nabla_\perp)\mathbf{E}_\perp^{(1)} + \frac{\left[\nabla_\perp \times [\mathbf{E}_\perp^{(1)*} \times \mathbf{E}_\perp^{(1)}]\right]}{2}\right).$$

## *2 Энергетические характеристики векторных параксиальных гауссовых пучков с однородной поляризацией*

Пусть некоторая волновая функция $F$ удовлетворяет скалярному параболическому уравнению

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)F = 0. \qquad (2.1)$$

Простейшим пучковым решением (2.1) является гауссиан

$$G = \frac{1}{q}\exp\left(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q}\right), \qquad (2.2)$$

где $q = z - q_0$ – комплексный параметр пучка; $q_0 = q_0' + iq_0''$ – комплексная константа, причем $q_0'' = kw_0 / 2$ – конфокальный параметр пучка; $w_0$ – радиус пучка в перетяжке. Здесь и далее используются обозначения: $k = \omega n / c$. Отметим, что любой гауссов пучок в своей амплитуде содержит множитель (гауссиан) $G$.

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных гауссовых световых пучков первого типа $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)})$. Для анализа их поляризационных характеристик поперечную часть векторной амплитуды простейшего гауссова пучка с однородной поляризацией представим в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp G, \qquad (2.3)$$

где комплексный постоянный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ не зависит от координат $(x, y)$. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются. Разложим нормированный ($|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$) вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ по декартовому базису $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_x\mathbf{e}_x + \eta_y\mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}, \qquad (2.4)$$

где $\eta_x$ и $\eta_y$ – некоторые постоянные комплексные параметры. Видим, что поляризация пучков (2.1) определяется комплексным параметром $\eta = \eta_y / \eta_x = \mathrm{tg}(\psi' + i\psi'')$ и одинакова по всему поперечному сечению пучка. Иначе говоря, поляризационные характеристики пучка обладают трансляционной инвариантностью в поперечной плоскости $(x, y)$. В общем случае пучки поляризованы эллиптически.

Плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon|G|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n}w; \qquad (2.5)$$

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\rho}{|q|^2}\left((z - q_0')\,\mathbf{e}_\rho + \mathrm{th}\,2\psi'' q_0''\mathbf{e}_\phi\right) + \mathbf{e}_z\right)S_z. \quad (2.6)$$

Продольному потоку энергии $S_z$ соответствует линейный момент, азимутальному $S_\phi$ – спиновый момент, а радиальному $S_\rho$ – орбитальный момент электромагнитного поля [15].

Исследуем пространственную форму линий потока энергии $\mathbf{S}$ пучков, которая определяется дифференциальным уравнением [13]

$$\frac{d\rho}{S_\rho} = \frac{\rho\,d\phi}{S_\phi} = \frac{dz}{S_z}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим сначала зависимость $S_\rho$ от $z$ при фиксированном азимутальном угле $\phi$. Интегрируя, получаем $S_\rho = S_{\rho 0}\sqrt{1 + (z - q_0')^2 / q_0''^2}$.

Это – уравнение гиперболоида вращения вокруг оси $z$. В дальней зоне пучок становится гомоцентрическим. Поток энергии в каждой точке движется вдоль поверхности однополостного гиперболоида.

Как известно [1], пространственная форма кругового гауссова пучка определяется уравнением $\rho = w_0\sqrt{1+(z-q_0')^2/q_0''^2}$. Поэтому при $\rho_0 = w_0$ боковая поверхность гауссова пучка совпадает с поверхностью, по которой движется энергия электромагнитного поля.

Поскольку для параксиальных пучков $\left|\frac{\rho}{q_0''}\right| \ll 1$, то $\left|\frac{S_\rho}{S_z}\right| \ll 1$, $\left|\frac{S_\phi}{S_z}\right| \ll 1$. В то же время отношение $S_\rho / S_\phi$ может быть любым.

Рассмотрим теперь зависимость азимутального потока энергии $S_\phi$ от $z$ при фиксированном радиусе $\rho$. Интегрируя, получаем

$$\phi = \operatorname{th} 2\psi'' \operatorname{arctg}\frac{z-q_0'}{q_0''}. \qquad (2.8)$$

При изменении расстояния $z$ в пределах $(-\infty,\infty)$ направление потока энергии $S_\phi$ поворачивается вокруг оси $z$ на угол $\phi = \pi \operatorname{th} 2\psi''$. Поворот максимален и равен $\pi$ для циркулярно поляризованных мод и отсутствует при линейной поляризации света.

Исследуем далее зависимость $S_\rho$ от $S_\phi$ при фиксированном $z$, т. е. в поперечной плоскости $(x, y)$. Получаем

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{z-q_0'}{\operatorname{th} 2\psi_0'' q''}\phi\right). \qquad (2.9)$$

Это – логарифмическая спираль. Итак, в поперечном сечении гауссова пучка линии поперечного потока энергии представляют собой логарифмические спиральные кривые. При удалении от перетяжки пучка спирали постепенно раскручиваются. Отметим, что в работе [10] выражения для линий потока энергии получены только для циркулярно поляризованных гауссовых световых пучков.

Итак, линии потока энергии $\boldsymbol{S}$ векторных обычных гауссовых световых пучков представляют собой кривые, расположенные на поверхностях круговых однополостных гиперболоидов вращения вокруг оси пучка $z$. Они почти совпадают с образующими гиперболоидов, но закручены в пространстве на угол $\phi = \pi \operatorname{th} 2\psi''$.

### *3 Энергетические характеристики векторных параксиальных гауссовых световых пучков с неоднородной поляризацией*

Обсудим теперь свойства некоторых параксиальных векторных гауссовых световых пучков первого типа ($\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$) с неоднородной поляризацией. Для анализа их поляризационных характеристик поперечную часть векторной амплитуды пучка вида (1.2) с неоднородной поляризацией возьмем в простой форме

$$\mathbf{E}_\perp^{(1)} = \partial_x G\mathbf{e}_x + a\partial_y G\mathbf{e}_y, \qquad (3.1)$$

где $G$ – гауссиан, $a = a' + a''$ – некоторая комплексная константа. Тогда получаем следующие гауссоподобные моды

$$\mathbf{E}^{(1)} = \left[x\mathbf{e}_x + ay\mathbf{e}_y + \left(\frac{(1+a)i}{k} - \frac{x^2+ay^2}{q}\right)\mathbf{e}_z\right]\frac{G}{q};$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(2)}; \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \left[x\mathbf{e}_y - ay\mathbf{e}_x + \frac{(a-1)xy}{q}\mathbf{e}_z\right]\frac{G}{q};$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{E}^{(1)}. \qquad (3.3)$$

Эти пучки представляют собой векторные суперпозиции двух скалярных полых гауссовых пучков $xG/q$ и $yG/q$.

А) Пусть $a = 1$, тогда выражения (3.2) и (3.3) описывают соответственно известные [4], [5] гауссовы $TH$ и $TE$-моды. Действительно, электрические поля сопряженных пучков $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ при $a = 1$ соответственно равны

$$\mathbf{E}^{(1)} = \left[\rho\,\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q}\right)\mathbf{e}_z\right]\frac{G}{q};$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)\frac{G}{q} \equiv \rho\,\mathbf{e}_\phi\frac{G}{q}. \qquad (3.4)$$

Мода $\mathbf{E}^{(2)}$ называется гауссовой $TE$-модой, поскольку $E_z = 0$. Видим, что для $TE$-моды электрическое поле поляризовано радиально, а магнитное – азимутально. Кроме того, имеется слабая продольная компонента магнитного поля ($|H_z| \ll |H_\rho|$). Аналогичные выводы следуют и для $TH$-мод.

В отличие от однородно поляризованных мод, $TH$- и $TE$-моды (по поляризации) – это пучки с нарушенной трансляционной симметрией, т. е. пучки с неоднородной поляризацией по поперечному сечению пучка. Однако $TH$- и $TE$-моды обладают азимутальной симметрией.

Усредненные по времени плотности энергии $w$ и потока энергии $\boldsymbol{S}$ электромагнитного поля обоих сопряженных $TE$ и $TH$ гауссовых пучков при этом соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\rho^2\left|\frac{G}{q}\right|^2, \quad \mathbf{S} = \left(\frac{\rho(z-q_0')}{|q|^2}\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z\right)w, \quad (3.5)$$

где $|G|^2 = \frac{1}{|q|^2}\exp\left(\frac{k\rho^2 q_0''}{|q|^2}\right)$.

$TE$ и $TH$ моды являются полыми, на оси пучка $w = 0$ и $\mathbf{S} = 0$. Существенно, что для $TE$ и $TH$

мод отсутствует спиновый (азимутальный) поток энергии, хотя есть небольшой радиальный поток, обусловленный расходимостью пучка [4]. Отношение $\left|S_\rho / S_z\right|$ максимальное при $\left|z-q_0'\right| = q_0''$.

Для *TE* и *TH* мод линии потока энергии $\left|S_\rho\right|$ являются образующими гиперболами для гиперболоида вращения вокруг оси *z*, как для однородных гауссовых мод.

Б) Пусть *a* – произвольное комплексное число в (3.2), тогда получаем более сложные неоднородно поляризованные пучки. Для моды (3.2) азимут $\psi'$ эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс и ее эллиптичность $\gamma$ выражаются соответственно как

$$\psi' = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2xya'}{x^2 - |a|^2 y^2};$$

$$\gamma = \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{2xya''}{x^2 + |a|^2 y^2}\right).$$

Аналитические расчеты и выполненное графическое моделирование приводят к следующим выводам.

1. Поляризационные свойства зависят только от азимутального угла $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$ и не зависят от $\rho$. В частности, при $x = 0$ и $y = 0$ имеем линейную поляризацию.

2. При заменах $a' \to -a'$ азимуты эллипсов поляризации изменяются на противоположные.

3. При заменах $a'' \to -a''$ направления вращения эллипсов поляризации изменяются на противоположные.

4. При увеличении (уменьшении) отношения $a''/a'$ возрастает (убывает) эллиптичность поля в данной точке, а направления главных осей эллипсов поляризации не изменяются.

5. Главные оси эллипсов поляризации в зависимости от комплексного параметра *a* могут быть расположены вдоль гипербол, парабол или замкнутых кривых.

6. Картина эллипсов поляризации обладает группой симметрии *mmm*, которая включает оси симметрии $2_x, 2_y, 2_z$ и плоскости симметрии $m_x, m_y, m_z$.

Продольная $S_z$, орбитальная $\mathbf{S}_o$ и спиновая $\mathbf{S}_s$ плотности потока энергии неоднородных мод (3.2), (3.3) равны

$$S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n}\left|\frac{G}{q}\right|^2 (x^2 + |a|^2 y^2);$$

$$\mathbf{S}_o = \frac{\rho}{|q|^2}\left(z - q_0'\right)\mathbf{e}_\rho S_z;$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon a''\rho}{8\pi nk}\left|\frac{G}{q}\right|^2 \times$$

$$\times\left(\cos 2\phi\,\mathbf{e}_\rho \frac{x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y}{k} + \sin 2\phi\,\mathbf{e}_\phi\left(\frac{kq_0''\rho^2}{|q|^2} - 1\right)\right).$$

Спиновый поток энергии $\mathbf{S}_s$ включает азимутальную и радиальную части. Он имеет азимутальный период, равный $\pi$. При вещественном параметре *a* поток $\mathbf{S}_s = 0$.

### 4 Суперпозиция TE и TH гауссовых мод

Возьмем когерентную суперпозицию *TE* и *TH* гауссовых мод в форме

$$\mathbf{E}^{(3)} = \left[\rho(\eta_1\mathbf{e}_\rho + \eta_2\mathbf{e}_\phi) + \eta_1\left(\frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q}\right)\mathbf{e}_z\right]\frac{G}{q}; \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}^{(4)} = \left[\rho(-\eta_2\mathbf{e}_\rho + \eta_1\mathbf{e}_\phi) - \eta_2\left(\frac{2i}{k} - \frac{\rho^2}{q}\right)\mathbf{e}_z\right]\frac{G}{q}.$$

Здесь $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ – сопряженные пучки, $\eta_1$ и $\eta_2$ – некоторые постоянные коэффициенты. Введем комплексный параметр $\eta_k$ когерентного смешивания *TE* и *TH* мод соотношением $\eta_k = \eta_2/\eta_1 = \operatorname{tg}(\psi_k' + i\psi_k'')$, тогда азимут поляризации $\psi_{\text{общ}}$ и эллиптичность $\gamma_{\text{общ}}$ моды $\mathbf{E}^{(3)}$ соответственно равны $\psi_{\text{общ}} = \phi + \psi_k'$ и $\gamma_{\text{общ}} = \operatorname{th}\psi_k''$. Здесь $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$ – обычный азимут направления, угол спиральности $\psi_k''$ можно вычислить из соотношения $\operatorname{tg} 2\psi_k' = 2\eta_k'/(1 - |\eta_k|^2)$. Интересно, что эллиптичности мод $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ определяются только коэффициентом смешивания $\eta_k''$ когерентных *TE* и *TH* гауссовых мод.

Если параметр смешивания мод $\eta_k$ вещественный, то имеем линейно поляризованные пучки, впервые описанные Гори [6], у которых неоднородные линии поляризации образуют логарифмические спирали. Если же $\eta_k$ – комплексный параметр, то получаем спиральные пучки с эллиптической поляризацией. В поперечном сечении пучка поляризационная картина представляет совокупность спиралей из одинаковых эллипсов, главные оси которых ориентированы вдоль логарифмических спиралей. Эти спирали для пучков $\mathbf{E}^{(3)}$ описываются уравнениями вида $\rho = \rho_0 \exp\left(\dfrac{\phi}{\operatorname{tg}\psi_k'}\right)$. Для пучков $\mathbf{E}^{(4)}$ логарифмические спиральные кривые закручены в противоположном направлении. Эллиптические спиральные пучки $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ обобщают линейные спиральные пучки Гори [6] и, по-видимому, еще не исследовались.

Энергетические характеристики мод $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ следующие:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right)\rho^2\left|\frac{G}{q}\right|^2;$$

$$\mathbf{S}=\left(\frac{\rho(z-q_0')\mathbf{e}_\rho}{|q|^2}+\operatorname{th}2\psi_k''\left(\frac{\rho q_0''}{|q|^2}-\frac{2}{k\rho}\right)\mathbf{e}_\phi+\mathbf{e}_z\right)S_z.$$

По сравнению с гауссовыми однородными модами в $\boldsymbol{S}$ появилось дополнительное слагаемое $-\operatorname{th}2\psi_k''\left(\frac{2}{k\rho}\right)\mathbf{e}_\phi$, которое мы относим к вкладу в спиновый поток.

Отсюда следует, что если изменять поляризацию пучков $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ при неизменной общей интенсивности, то линейный $S_z$ и орбитальный $S_o$ потоки энергии не меняются, а у спинового потока $S_s$ изменяется только параметр эллиптичности $\operatorname{th}2\psi_k''$.

Исследуем пространственную форму линий потока энергии $\mathbf{S}$ пучков $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$.

Зависимость $S_\rho$ от $z$ при фиксированном азимутальном угле $\phi$ такая же, как для однородных мод.

Азимут потока энергии от $z$ при фиксированном $\rho$ равен

$$\phi=\left(\operatorname{arctg}\frac{z-q_0'}{q_0''}-\frac{2(z-q_0')}{\rho^2}\right)\operatorname{th}2\psi''+\phi_0.$$

Найдем теперь зависимость $S_\phi$ от $S_\rho$ при постоянном $z$ (в поперечной плоскости пучка). Интегрируя, получаем следующую зависимость азимута потока энергии от $\rho$ при фиксированном $z$:

$$\phi=\left(q_0''\ln\frac{\rho}{\rho_0}+\frac{|q|^2}{k\rho^2}\right)\frac{\operatorname{th}2\psi''}{z-q_0'}+\phi_0.$$

Итак, линии потока энергии $\mathbf{S}$ представляют собой спирали вокруг оси $z$. Спирали закручиваются с увеличением расстояния $z$ от перетяжки пучка, с увеличением расстояния $\rho$ от оси пучка и с возрастанием эллиптичности пучка.

### *Заключение*

В настоящей работе используется предложенный в [8]–[9] векторный формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков с различными типами поляризации.

Осуществлён теоретический анализ поляризационных и энергетических свойств векторных параксиальных гауссовых пучков различных типов с однородной и неоднородной поляризацией по поперечному сечению.

Была исследована поляризация для неоднородно поляризованных световых пучков. Установлено, что для полей, представляющих суперпозицию двух скалярных полых гауссовых пучков, в зависимости от параметра смешивания *a*, направления главных осей эллипсов поляризации могут быть расположены вдоль различных кривых, например, гипербол, парабол и др.

Картина эллипсов поляризации обладает симметрией *mmm*.

Исследован новый тип пучков, образующийся в результате когерентной суперпозиции ТЕ и ТН гауссовых мод. Такие пучки обладают спиральной эллиптической поляризацией.

В результате исследования потока энергии гауссова кругового пучка было показано, что линии потока энергии последнего не являются прямыми, а представляют собой сложные пространственные кривые.

Поперечные потоки энергии $\mathbf{S}_\perp$ различных пучков были явно разделены на орбитальные $\mathbf{S}_0$ и спиновые $\mathbf{S}_s$ части.

Показано, что потоки энергии гауссова пучка с однородной поляризацией и гауссовых *TE* и *TH* мод движутся вдоль поверхностей однополостных гиперболоидов вращения вокруг оси пучка. Для однородных гауссовых пучков эти линии немного закручены. Кручение определяется поляризацией, точнее, эллиптичностью волны. Кручение – максимальное при круговой поляризации и отсутствует при линейной. Поперечные же потоки энергии пучков со спиральной эллиптической поляризацией движутся по более сложным нелогарифмическим спиральным кривым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.

2. *Когельник, Х.* Резонаторы и световые пучки лазеров / Х. Когельник, Т. Ли // ТИИЭР. – 1966. – Т. 54, № 10. – С. 95–112.

3. *Koichi, Shimoda*. Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Shimoda Koichi // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.

4. *Davis, L. W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis and G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № l. – P. 22–23.

5. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус ; пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 432 с.

6. *Gori, F.* Polarization basis for vortex beams / F.Gori // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18, № 7. – P. 1612–1617.

7. *Бельский, А.М.* Пространственная структура лазерного излучения / А.М. Бельский, Т.М. Корнейчик, А.П. Хапалюк // – М. : Изд-во БГУ, 1982. – 198 с.

8. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 1–5.

9. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (10). – С. 1–5.

10. *Ардашев, А.Ю.* Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скроцкий // Известия вузов. Радиофизика. – 1968.– Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.

11. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф // – М. : Наука, 1970. – 587 с.

12. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров // Мн. : Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

13. *Кочин, Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин // – М. : Изд- во АН СССР, 1951.– 426 с.

14. *Bekshaev, A.Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Opt. Communs. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

15. *Bekshaev, A*. Internal flows and energy circulation in light beams // A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin / Journ. of Optics. – 2011. – Vol. 13, № 5. – 053001 (32 pp.).

16. *Berry, M.V.* Optical currents / M.V. Berry // Journ. of Optics. – A : Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, № 9. – 094001 (12 pp.).

*Поступила в редакцию 15.06.12.*