УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРИМИТИВНЫХ ГРУПП

И.В. Лемешев, В.С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE SOLVABILITY OF SOME FINITE PRIMITIVE GROUPS

I.V. Lemeshev, V.S. Monakhov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть M – подгруппа конечной группы G и $\mathrm{Core}_G M$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в M. Мы определяем строение конечной группы G, если G содержит максимальную подгруппу M с $\mathrm{Core}_G M = 1$ и все максимальные подгруппы H из G с $\mathrm{Core}_G H = 1$ обладают некоторыми свойствами.

Ключевые слова: *конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа.*

Let M be a subgroup of a finite group G and $\mathrm{Core}_G M$ is the largest normal subgroup of G contained in M. We determine the structure of the finite group G if G possesses a maximal subgroup M with $\mathrm{Core}_G M = 1$ and all maximal subgroups H of G with $\mathrm{Core}_G H = 1$ satisfy certain properties.

Keywords: *finite group, solvable group, maximal subgroup.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют [1], [2]. В частности, если H – подгруппа группы G, то

$$\mathrm{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x$$

ее ядро [1, глава 3.4], которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H. Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют примитивной. В примитивной группе максимальную подгруппу с единичным ядром Гашюц [3] предложил называть примитиватором. Общие свойства примитивных групп подробно описаны в [1, глава 4.6], [3].

В 1957 году Р. Бэр получил следующий результат.

***Теорема* А** [4]. *Если группа G примитивна и все ее примитиваторы нильпотентны, то G разрешима.*

В 2009 году М. Асаад развил этот результат Бэра.

***Теорема* B.** *Примитивная группа G разрешима в следующих случаях:*

1) *в каждом примитиваторе максимальные подгруппы из всех силовских подгрупп нормальны* [5, теорема 1.2];

2) *каждый примитиватор является разрешимой группой, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна* [5, теорема 1.3 (a)];

3) *в каждом примитиваторе все примарные подгруппы пронормальны* [5, теорема 1.3 (b)];

4) *в каждом примитиваторе все силовские подгруппы циклические* [5, теорема 1.3 (c)];

5) *каждый примитиватор сверхразрешим и группа G не содержит секций, изоморфных симметрической группе S_4* [5, следствие 2.1].

Заметим, что в ситуациях 1)–5) примитиваторы являются сверхразрешимыми подгруппами. Но заменить нильпотентность в теореме А на сверхразрешимость в общем случае нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2,7)$. В связи с этим Асаад [5] сформулировал следующий вопрос:

Что можно сказать о структуре примитивной группы, в которой все примитиваторы сверхразрешимы?

В настоящей заметке развивается данная тематика. В теореме 2.1 получен ответ на вопрос Асаада. В теореме 2.2 установлены новые признаки разрешимости и частичной разрешимости примитивной группы с ограничениями на примитиваторы.

При доказательстве теоремы 2.1 используется теорема из работы [6], доказательство которой использует классификацию конечных простых групп. Доказательство теоремы 2.2 классификацию конечных простых групп не использует.

1 Вспомогательные результаты

Для группы G множество всех простых делителей её порядка обозначается через $\pi(G)$. Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Если H – подгруппа группы G, то $H/\mathrm{Core}_G H$ – кофактор подгруппы H в группе G. Через G', $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной. Группа, которая одновременно p-замкнута и p-нильпотентна, называется p-разложимой, а pd-группой называют группу, порядок которой делится на простое число p. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G обозначается через $S(G)$. Вполне факторизуемая группа – группа, в которой все подгруппы дополняемы.

***Лемма* 1.1.** *Если $G/F(G)$ p-разложима, то* $l_p(G)\le 1$.

Доказательство. Ясно, что группа G является p-разрешимой и фактор-группа

$$(G/N)/(F(G/N))$$

p-разложима для каждой нормальной в G подгруппы N. В силу индукции $l_p(G/N)\le 1$ для $N\ne 1$. По [8, VI.6.9]

$$O_{p'}(G)=\Phi(G)=1, F(G)=O_p(G)=C_G(O_p(G)),$$

$$G=[O_p(G)]M, O_p(M)=1$$

для некоторой максимальной в G подгруппы M. Из p-разложимости $G/F(G)$ следует, что M p-разложима. Но $O_p(M)=1$, поэтому M – p'-подгруппа и $l_p(G)\le 1$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.2** [7]. *Группа тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она сверхразрешима и ее силовские подгруппы по всем простым делителям ее порядка элементарные абелевы.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть H – максимальная подгруппа группы G и D – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, не сопряженных с подгруппой H. Тогда подгруппа D метанильпотентна.*

Доказательство. Ясно, что

$$D\cap \mathrm{Gore}_G H=\Phi(G)$$

и D нормальна в G. Если $\Phi(G)\ne 1$, то $D/\Phi(G)$ метанильпотентна по индукции, а по [2, 4.2.1] подгруппа D метанильпотентна. Пусть $\Phi(G)=1$ и N – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в D. Тогда N не содержится в H и $G=HN$. Поэтому $D/N=\Phi(G/N)$ и D/N нильпотентна. Предположим, что N непримарна и пусть P – силовская p-подгруппа из N, $p\in\pi(N)$. По лемме Фраттини $G=NN_G(P)$ и $N_G(P)\ne G$. Если $N_G(P)\subseteq K$, K – максимальная в G подгруппа, $K\ne H^g$, для всех $g\in G$, то $G=NN_G(P)\subseteq K$, противоречие. Поэтому $N_G(P)\subseteq H^x$ для некоторого $x\in G$ и $P^{x^{-1}}\subseteq H\cap N$. Итак, для каждого простого числа $p\in\pi(N)$ некоторая силовская p-подгруппа из N содержится в H. Поэтому $N\subseteq H$, противоречие. Значит N примарна и подгруппа D метанильпотентна.

***Лемма* 1.4** [6]. *Пусть в группе G кофакторы максимальных подгрупп сверхразрешимы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если G – неразрешимая группа, то её неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $PSL(2,p)$, p – простое, $p\equiv\pm 1(\bmod 8)$.*

2. *Если G – разрешимая группа, то её нильпотентная длина не превышает 3, p-длина $l_p(G)\le 2$ для всех $p\in\pi(G)$, и $l_q(G)\le 1$ для наибольшего q из $\pi(G)$.*

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть группа G примитивна и все ее примитиваторы сверхразрешимы.*

1. *Если G – неразрешимая группа, то $G\simeq PGL(2,p)$, p – простое, $p\equiv\pm 1(\bmod 8)$.*

2. *Если G – разрешимая группа, то $G'=[F(G)]H$, подгруппа H холлова в G' и нильпотентна, поэтому нильпотентная длина G не превышает 3, p-длина $l_p(G)\le 2$ для $\{p\}=\pi(F(G))$, и $l_q(G)\le 1$ для всех $q\in\pi(G)\setminus\{p\}$.*

Доказательство.

1. Пусть G – неразрешимая примитивная группа со сверхразрешимыми примитиваторами. Зафиксируем максимальную подгруппу M с единичным ядром.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа является сверхразрешимой группой по условию. По [8, IV.9.6] группа G разрешима, противоречие. Значит, G не является простой группой.

Пусть K – нетривиальная нормальная в G подгруппа. Тогда K не содержится в M, $G=KM$ и фактор-группа G/K сверхразрешима. Поэтому в группе G нет нетривиальных разрешимых нормальных подгрупп и $S(G)=1$.

Предположим, что в группе G существуют две минимальные нормальные подгруппы. Пусть K_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i=1,2$, $K_1\ne K_2$. Тогда G/K_i разрешима, поэтому $G/K_1\times G/K_2$ разрешима. По [1, 2.33] группа G изоморфна подгруппе из $G/K_1 \times G/K_2$, поэтому G разрешима, противоречие. Значит, G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу.

Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа. Тогда

$$K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_t, \quad K_i \simeq K_1, \quad 1 \le i \le t.$$

Предположим, что $t \ge 2$ и пусть R_i – силовская r-подгруппа из K_i, $r \in \pi(K)$, r – наибольшее. Произведение $R = R_1 \times ... \times R_t$ будет силовской r-подгруппой из K и $G = N_G(R)K$ по лемме Фраттини. Подгруппа R не нормальна в G, поэтому $N_G(R)$ – собственная подгруппа в G. Пусть U – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(R)$. Поскольку $G = KU$, то $\mathrm{Core}_G U = 1$ и U сверхразрешима по условию, в частности, $N_G(R)$ сверхразрешима. Подгруппа $N_G(R)$ не содержится в $N_G(K_1)$ и можно выбрать элемент $a \in N_G(R) \setminus N_G(K_1)$. По [1, 2.39] $K_1^a = K_j$, для некоторого $j > 1$. Согласно [9, X.8.13] $N_{K_1}(R_1) \ne R_1 C_{K_1}(R_1)$, поэтому можно выбрать r'-элемент $b \in N_{K_1}(R_1) \setminus R_1 C_{K_1}(R_1)$. Пусть $A = \langle a, b \rangle$. Ясно, что $A \subseteq N_G(R)$, поэтому произведение RA является сверхразрешимой подгруппой и R нормальна в RA. Элемент $b^a \in K_1^a = K_j$, а элемент $b^{-1} \in K_1$, поэтому элементы b^{-1} и b^a перестановочны и $b^{-1}b^a = [b,a]$ будет r'-элементом. Поскольку $[b,a] \in A' \subseteq (RA)'$ и по [1, 4.52] подгруппа $(RA)'$ нормальна в RA и нильпотентна, то r'-холлова подгруппа B из $(RA)'$ централизует подгруппу R. Так как $[b,a] \in B$, то $[b,a] \in C_G(R) \subseteq C_G(R_1)$. Отсюда следует, что $[a,b] = [b,a]^{-1} \in C_G(R_1)$. Элемент $b^a \in K_1^a = K_j \subseteq C_G(R_1)$ и теперь $b = b^a[a,b] \in C_G(R_1)$, получили противоречие с выбором элемента b. Поэтому допущение $t \ge 2$ неверно и K – простая группа. По лемме 1.4 подгруппа $K \simeq PSL(2,p)$, p – простое, $p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Так как K простая, то $K \cap C_G(K) = Z(K) = 1$ и $C_G(K)$ – сверхразрешимая нормальная в G подгруппа. Поэтому $C_G(K) = 1$ и

$$G \simeq \mathrm{Aut}(PSL(2,p)) = PGL(2,p).$$

Утверждение 1 доказано.

2. Пусть G – разрешимая примитивная и все ее примитиваторы сверхразрешимы. Зафиксируем максимальную подгруппу M с единичным ядром. По [1, 4.42] группа $G = [F(G)]M$, $F = F(G)$ – единственная в G минимальная нормальная подгруппа, F является p-подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$ и $O_p(M) = 1$. Так как $G/F \simeq M$ сверхразрешима, то ее коммутант $(G/F)' = G'F/F \simeq M'$ является нильпотентной подгруппой [1, 4.52]. Поскольку F – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, то $F \subseteq G'$ и $G' = [F](G' \cap M)$. Из включения

$$O_p(M') \subseteq O_p(M) = 1$$

следует, что M' является p'-подгруппой. Теперь ясно, что $G' = [F]M'$, подгруппа M' холлова в G' и нильпотентна. Отсюда следует, что нильпотентная длина G не превышает 3, $l_p(G) \le 2$ и $l_q(G) \le 1$ для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Теорема 2.1 доказана.

***Теорема* 2.2.** *Зафиксируем простое число p.*

1. *Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p-нильпотентной группой. При $p = 2$ дополнительно предположим, что силовская 2-подгруппа в каждом примитиваторе абелева. Тогда $G/F(G)$ p-нильпотентна. В частности, группа G p-разрешима и $l_p(G) \le 2$.*

2. *Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p-разложимой группой. Тогда $G/F(G)$ p-разложима. В частности, группа G p-разрешима и имеет единичную p-длину.*

Доказательство.

1. Ясно, что теорему надо доказывать в случае, когда $p \in \pi(G)$. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p-нильпотентной группой. Зафиксируем в G максимальную подгруппу H с единичным ядром. Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа p-нильпотентна по условию. По [8, IV.5.4] группа G либо p-нильпотентна, либо бипримарна, в частности, G – непростая группа, противоречие. Значит, допущение неверно и G – непростая группа.

Пусть K – собственная нормальная в G подгруппа и M – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу K. Тогда $K \subseteq \mathrm{Core}_G M$, поэтому в группе G существует максимальная подгруппа с неединичным ядром.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $G = NH$ и фактор-группа $G/N \simeq H/H \cap N$ p-нильпотентна. Если N – нильпотентная подгруппа, то теорема доказана. Поэтому N считаем ненильпотентной подгруппой. Если N – p'-группа, то из того, что фактор-группа G/N p-нильпотентна, следует, что и сама группа G p-нильпотентна. Поэтому в дальнейшем считаем, что N является ненильпотентной pd-подгруппой.

Предположим, что существует минимальная нормальная в G подгруппа T, отличная от N. Тогда $N \cap T = 1$, $G = TH$, $G/T \simeq H/H \cap T$ p-нильпотентна. Поскольку всех класс p-нильпотентных групп является формацией, то группа G p-нильпотентна и теорема справедлива. Поэтому следует считать, что в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна.

Пусть L – произвольная максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = LN$. Если $\mathrm{Core}_G L \neq 1$, то $N \subseteq \mathrm{Core}_G L$ и $G = LN = L$, противоречие. Это означает, что каждая максимальная в G подгруппа, не содержащая подгруппу N, имеет единичное ядро, а следовательно, p-нильпотентна.

Пусть P – силовская p-подгруппа из N и $P_1 \in \{Z(P), J(P)\}$, где $Z(P)$ – центр подгруппы P, а $J(P)$ – подгруппа, определенная в [8, IV.6.1]. Обе подгруппы $Z(P)$ и $J(P)$ характеристические в P, они неединичны и не нормальны в группе G. Поэтому $N_G(P_1)$ – собственная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P) \subseteq NN_G(P_1)$.

Пусть T – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Тогда T не содержит N, а значит, $\mathrm{Core}_G T = 1$ и T p-нильпотентна. Поэтому подгруппа $N_N(P_1)$ p-нильпотентна.

Пусть $p > 2$. По [8, IV.6.2] подгруппа N p-нильпотентна. Теперь N – минимальная нормальная в G подгруппа и N является p-нильпотентной pd-подгруппой. Это возможно только в случае, когда N p-группа. Но в этом случае N содержится в $F(G)$ и теорема доказана.

Пусть теперь $p = 2$. Тогда N является неразрешимой подгруппой, силовская 2-подгруппа P из N неединична и $G = NN_G(P)$ по лемме Фраттини. Пусть T – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда T не содержит N, а значит $\mathrm{Core}_G T = 1$, T 2-нильпотентна и имеет абелеву силовскую 2-подгруппу. Поэтому подгруппа $N_N(P)$ 2-нильпотентна и подгруппа P содержится в центре $N_N(P)$. По [8, IV.2.6] подгруппа N 2-нильпотентна. Получили противоречие с тем, что N является неразрешимой подгруппой четного порядка.

Итак, $G/F(G)$ p-нильпотентна. Из определения p-длины [8, глава VI.6] следует, что $l_p(G) \leq 2$.

2. При $p > 2$ применимо доказанное утверждение 1, по которому фактор-группа $G/F(G)$ будет p-нильпотентной. Поскольку $G = F(G)H$ для некоторого примитиватора H и подгруппа H p-разложима по условию, то $G/F(G)$ p-разложима. Из леммы 1.1 следует, что $l_p(G) \leq 1$.

Пусть $p = 2$. Тогда можно повторить пять первых абзацев доказательства утверждения 1 теоремы 2.2 с заменой p-нильпотентности на 2-разложимость и, сохраняя все обозначения, продолжить доказательство.

Предположим, что G/N является группой нечетного порядка, т. е. силовская 2-подгруппа P из N является силовской в G. По лемме Фраттини группа $G = N_G(P)N$, а так как P не нормальна в G, то $N_G(P) \neq G$. Пусть L – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда L не содержит N, а значит $\mathrm{Core}_G L = 1$ и L 2-разложима: $L = P \times K$, где K – нормальная $2'$-холлова подгруппа из L. Ясно, что $L = N_G(P)$ и $G = NK$. Если P_1 – произвольная неединичная подгруппа из P, то $K \subseteq N_G(P_1)$ и $G = NK \subseteq NN_G(P_1)$. Так как $N_G(P_1) \neq G$, то существует максимальная в G подгруппа T, содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Из равенства $G = NT$ следует, что T не содержит подгруппу N, поэтому подгруппа T 2-разложима. Теперь и подгруппа $N_G(P_1)$ 2-разложима. Итак, нормализатор каждой неединичной 2-подгруппы из N является 2-разложимой группой. По [8, IV.5.8] подгруппа N 2-нильпотентна. Но N содержит силовскую 2-подгруппу группы G, поэтому N – 2-группа и N содержится в $F(G)$. В этом случае утверждение 2 теоремы доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда фактор-группа G/N имеет четный порядок. Тогда каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа X будет 2-разложимой подгруппой четного порядка: $X = X_2 \times X_{2'}$. Если $X_2 \neq G_2$, то X_2 – собственная подгруппа в $N_{G_2}(X_2)$, поэтому X_2 нормальна G. Но X_2 – неединичная ненормальная в G 2-подгруппа, поэтому $X_2 = G_2$ – силовская 2-подгруппа в G и $X = N_G(G_2)$. Таким образом, каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа является нормализатором силовской 2-подгруппы группы G. Так как нормализаторы силовских 2-подгрупп сопряжены, то все не содержащие подгруппу N максимальные в G подгруппы сопряжены и N метанильпотентна по лемме 1.3. Из того, что N – минимальная нормальная в G подгруппа, следует, что $N \subseteq F(G)$. В частности, группа G разрешима, $G/F(G)$ 2-разложима и $l_2(G) \leq 1$ по лемме 1.1. Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является вполне факторизуемой группой. Тогда второй коммутант группы G нильпотентен.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2 вполне факторизуемые группы сверхразрешимы и их силовские подгруппы элементарные абелевы, в частности, вполне факторизуемые группы метабелевы. Так как сверхразрешимые группы 2-нильпотентны, то применима теорема 2.2 при $p=2$ и $G/F(G)$ 2-нильпотентна. Пусть M – максимальная подгруппа с единичным ядром, она по условию существует и вполне факторизуема. Теперь

$$G=F(G)M,\quad G/F(G)\simeq M\cap F(G)$$

метабелева, т. е. $(G/F(G))^{(2)}=1$. По [1, лемма 4.6] $1=(G/F(G))^{(2)}=G^{(2)}F(G)/F(G)$, поэтому $G^{(2)}\subseteq F(G)$. Следствие доказано.

***Следствие* 2.2.** *Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является нильпотентной группой. Тогда G метанильпотентна.*

Доказательство. По условию все примитиваторы группы G p-разложимы для каждого $p\in\pi(G)$. Из утверждения 2 теоремы 2.2 получаем, что $G/F(G)$ p-разложима для всех $p\in\pi(G)$, поэтому $G/F(G)$ нильпотентна и G метанильпотентна.

***Следствие* 2.3.** *Зафиксируем простое число p. Пусть группа G примитивна и каждый ее примитиватор является p'-подгруппой. Тогда G p-замкнута.*

Доказательство. По условию все примитиваторы группы G являются p'-подгруппами, поэтому они p-разложимы и $G/F(G)$ p-разложима по утверждению 2 теоремы 2.2. Пусть M – максимальная подгруппа с единичным ядром, она по условию существует и является p'-подгруппой. Так как $G=F(G)M$, то $F(G)$ – силовская p-подгруппа и группа G p-замкнута. Следствие доказано.

3 Примеры

***Пример* 3.1.** При $p>3$ в группе $PSL(2,p)$ каждая собственная подгруппа p-замкнута. В группе $SL(2,8)$ каждая собственная подгруппа 3-замкнута. Эти группы примитивны. Поэтому аналоги теоремы 2.2 с заменой p-нильпотентности на p-замкнутость не имеют места.

***Пример* 3.2.** При $p=2$ условие абелевости силовских 2-подгрупп отбросить нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2,7)$, в которой все примитиваторы сверхразрешимы, а значит и 2-нильпотентны.

Следующие два примера указывают на то, что оценки p-длины в теоремах точные при любом p.

***Пример* 3.3.** В примитивной группе S_4 все примитиваторы 2-нильпотентны и $l_2(S_4)=2$.

***Пример* 3.4.** Пусть p и q – произвольные простые числа и a – показатель числа p по модулю q. В группе $GL(a,p)$ существует элемент β простого порядка q. Полупрямое произведение $[E_{p^a}]\langle\beta\rangle$ с нормальной элементарной абелевой p-подгруппой E_{p^a} будет ненильпотентной группой, у которой все собственные подгруппы примарны. Пусть Q – группа порядка q. В сплетении G групп Q и $[E_{p^a}]\langle\beta\rangle$ все максимальные подгруппы q-нильпотентны и $l_q(G)=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

3. *Gaschutz, W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics; № 11. – Canberra, Australian National University, 1979. – 100 p.

4. *Baer, R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

5. *Asaad, M.* On the solvability of finite groups / M. Asaad // Commun. algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 719–723.

6. *Евтухова, С.М.* О конечных группах со сверхразрешимыми кофакторами подгрупп / С.М. Евтухова, В.С. Монахов // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 4. – С. 53–57.

7. *Hall, Ph.* Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 201–204.

8. *Huppert, B.* Endliche Gruppen, I. / B. Huppert – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.

9. *Huppert, B.* Finite groups, III. / B. Huppert, N. Blackburn – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1982.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10Р-231).

Поступила в редакцию 16.12.11.