МАТЕМАТИКА

УДК 512.544

О МОДУЛЯХ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

ON MODULES OVER GROUP RINGS OF LOCALLY FINITE GROUPS

O.Yu. Dashkova

O. Honchar Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine

Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, такой, что $\mathbf{R}$ – коммутативное кольцо с единицей, $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, $C_G(A)=1$, G – локально конечная группа. Рассматривается система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп $H \le G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. Автор изучает $\mathbf{R}G$-модуль A, такой, что $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности как упорядоченное множество. Описаны свойства локально конечной группы G, удовлетворяющей заданным условиям. Также получены некоторые свойства локально разрешимой периодической группы G рассматриваемого вида при условии, что $\mathbf{R}$ – дедекиндово кольцо.

Ключевые слова: *артинов $\mathbf{R}$-модуль, групповое кольцо, локально конечная группа.*

Let A be an $\mathbf{R}G$-module, where $\mathbf{R}$ is a commutative ring with the unit, $A/C_A(G)$ is not an artinian $\mathbf{R}$-module, $C_G(A)=1$ and G is a locally finite group. Let $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ be a system of all subgroups $H \le G$ such that quotient modules $A/C_A(H)$ are not artinian $\mathbf{R}$-modules. The author studies $\mathbf{R}G$-module A such that $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ satisfies either weak minimal condition or weak maximal condition as an ordered set. The properties of the locally finite group G with these conditions are described. Some properties of a locally soluble periodic group G under consideration are obtained if $\mathbf{R}$ is a dedekind ring.

Keywords: *an artinian $\mathbf{R}$-module, a group ring, a locally finite group.*

Введение

Пусть A – векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F,A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F,A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $n \times n$-матриц, где $n = dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки, и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из таких ограничений, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [1], [2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2]. В [3] было введено другое условие конечности, налагаемое на бесконечномерные линейные группы. Авторы ввели понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H – подгруппа группы $GL(F,A)$. H действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $centdim_F H$ как $dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $centdim_F H$ конечна, и H имеет бесконечную центральную размерность, если $centdim_F H$ бесконечна.

Пусть $G \le GL(F,A)$. В [3] была рассмотрена система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathfrak{L}_{id}(G)$ «достаточно мала». Так, в [3] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $L_{id}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, исследовались в работе [4].

Слабое условие минимальности и слабое условие максимальности являются наиболее естественными теоретико-групповыми обобщениями обычных условий минимальности и максимальности. Слабое условие минимальности было введено в рассмотрение Д.И. Зайцевым [5], а слабое условие максимальности – Р. Бэром [6]. Пусть G – группа, $\mathcal{M}$ – некоторое семейство подгрупп группы G. Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию минимальности, т. е. если для любого убывающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n \geq G_{n+1} \geq \cdots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. Группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для $\mathcal{M}$-подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию максимальности, т. е. если для любого возрастающего ряда подгрупп из множества $\mathcal{M}$

$$G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots$$

существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. В [7] авторы изучали бесконечномерные периодические локально радикальные группы, у которых $\mathfrak{L}_{id}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности, либо слабому условию максимальности.

Если $G \leq GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обощением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ – кольцо, структура которого близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [8]. Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ – кольцо, G – группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгуппы H в модуле A. Следует отметить, что в теории модулей существует ряд обобщений конечномерного векторного пространства. Это модули, обладающие конечными композиционными рядами, конечно порожденные модули, нетеровы модули, артиновы модули.

В [9] исследовался $\mathbf{R}G$-модуль A, такой, что $\mathbf{R}$ – дедекиндово кольцо, $C_G(A) = 1$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Была рассмотрена система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Изучался такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима. Также рассматривался случай, когда система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, $C_G(A) = 1$, группа G разрешима, а $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел [10] и дедекиндовым кольцом [11].

Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ – коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ – система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$. Если же $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$.

Целью настоящей работы является изучение локально конечных групп, удовлетворяющих либо условияю $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Основными результатами работы являются теоремы 2.1 и 2.2.

1 Предварительные результаты

В настоящем разделе мы получим некоторые элементарные свойства групп рассматриваемого вида. Далее в разделах 1, 2 рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A, такой, что $C_G(A) = 1$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Кроме того, всюду, кроме леммы 2.2 и теоремы 2.2, в качестве $\mathbf{R}$ рассматривается коммутативное кольцо с единицей.

***Лемма* 1.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *Если $L \leq H \leq G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то и коцентрализатор подгруппы L в модуле A – артинов $\mathbf{R}$-модуль.*

(ii) *Если $L, H \leq G$ и коцентрализаторы подгрупп L и H в модуле A являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle L, H \rangle$ в модуле A – артинов $\mathbf{R}$-модуль.*

***Следствие* 1.1**. Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль. Множество $AD(G)$ всех элементов $x \in G$, таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A – артинов $\mathbf{R}$-модуль, является нормальной подгруппой группы G.

Доказательство. По лемме 1.1 (ii), $AD(G)$ является подгруппой группы G. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $AD(G)$ нормальна в группе G. Следствие доказано.

***Лемма* 1.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, H – подгруппа группы G. Предположим, что H содержит нормальную подгруппу K, коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда:*

(1) *если G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп;*

(2) *если G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$, то фактор-группа H/K удовлетворяет слабому условию максимальности для подгрупп.*

***Лемма* 1.3**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, L, K и H – подгруппы группы G, такие, что:*

(i) *K – нормальная подгруппа группы L;*

(ii) *K и L – H-инвариантные подгруппы;*

(iii) $L/K \cap HK/K = \langle 1 \rangle$;

(iv) $L/K = Dr_{n\in\mathbf{N}}\ L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ *– H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbf{N}$.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *если G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$, то коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем;*

(2) *если G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Существуют два бесконечных подмножества Σ и Δ множества $\mathbb{N}$, такие, что $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, $\Sigma \cap \Delta = \varnothing$. Поскольку множество Δ бесконечно, существует бесконечный строго возрастающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta(1) \subset \Delta(2) \subset \cdots \subset \Delta(k) \subset \cdots,$$

а также существует бесконечный строго убывающий ряд подмножеств множества Δ

$$\Delta^*(1) \supset \Delta^*(2) \supset \cdots \supset \Delta^*(k) \supset \cdots,$$

такие, что множества $\Delta(k+1) \setminus \Delta(k)$ и $\Delta^*(k) \setminus \Delta^*(k+1)$ бесконечны для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$D_k/K = Dr_{t\in\Sigma\cup\Delta(k)} L_t/K$$

и

$$D_k^*/K = Dr_{t\in\Sigma\cup\Delta^*(k)} L_t/K.$$

Сначала рассмотрим строго возрастающий ряд подгрупп

$$HD_1 < HD_2 < \cdots < HD_k < \cdots.$$

По построению индексы $|HD_{k+1} : HD_k|$ бесконечны. Если группа G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$, тогда коцентрализатор подгруппы HD_m в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle \le HD_m$, из леммы 1.1 следует, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle$ в модуле A также является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Аналогично устанавливаем, что коцентрализатор подгруппы $\langle H, L_t \mid t \in \Delta \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Учитывая равенство $\Sigma \cup \Delta = \mathbb{N}$, получаем, что

$$\langle \langle H, L_t \mid t \in \Delta \rangle, \langle H, L_t \mid t \in \Sigma \rangle \rangle =$$
$$= \langle H, L_t \mid t \in \Sigma \cup \Delta \rangle = HL.$$

По лемме 1.1, коцентрализатор подгруппы HL в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Аналогично можно построить строго убывающий ряд подгрупп

$$HD_1^* > HD_2^* > \cdots > HD_k^* > \cdots,$$

такой, что индексы $|HD_k^* : HD_{k+1}^*|$ бесконечны. Если группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что коцентрализатор подгруппы HD_m^* в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку $HK \le HD_m^*$, по лемме 1.1, коцентрализатор подгруппы HK в модуле A также является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Лемма доказана.

***Следствие* 1.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, и пусть L, K и H – подгруппы группы G, такие, что:*

(i) *K – нормальная подгруппа группы L;*

(ii) *K и L – H-инвариантные подгруппы;*

(iii) $L/K = Dr_{n\in\mathbb{N}}\ L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ *– H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$;*

(iv) *множество* $\mathbb{N} \backslash Supp(L/K \cap HK/K)$ *бесконечно.*

Если группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$ или условию $W_{max-nad}$, то коцентрализатор подгруппы HK в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. В частности, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Доказательство. Пусть

$$\Delta = \mathbb{N} \setminus Supp(L/K \cap HK/K),$$

и пусть $T/K = Dr_{n\in\Delta}\ L_n/K$. Тогда $T/K \cap HK/K = \langle 1 \rangle$. Применим лемму 1.3. Следствие доказано.

***Следствие* 1.3**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, и пусть L, K и H – подгруппы группы G, такие, что:*

(i) *K – нормальная подгруппа группы L;*

(ii) *K и L – H-инвариантные подгруппы;*

(iii) $L/K = Dr_{n\in N}\ L_n/K$, *где* $L_n/K \neq \langle 1 \rangle$ *– H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Если группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$ или условию $W_{max-nad}$, то централизатор подгруппы $\langle h\rangle K$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для каждого $h \in H$. В частности, $H \leq AD(G)$.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Поскольку L_n/K – H-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$, то L_n/K – $\langle h\rangle$-инвариантная подгруппа для любого $n \in \mathbb{N}$. В частности, множество $Supp(\langle h\rangle K/K \cap L/K)$ конечно. По следствию 1.2, коцентрализатор подгруппы $\langle h\rangle K$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Лемма доказана.

2 О структуре локально конечных групп, удовлетворяющих либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$

Очевидно, что черниковская группа удовлетворяет как слабому условию максимальности для подгрупп, так и слабому условию минимальности для подгрупп. Отсюда следует, что при изучении $\mathbf{R}G$-модуля A в случае, когда группа G является черниковской, G удовлетворяет как условию $W_{min-nad}$, так и условию $W_{max-nad}$.

***Лемма* 2.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Пусть K и H – подгруппы группы G, такие, что K – нормальная подгруппа H, и H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Предположим также, что подгруппы K и H $\langle g\rangle$-инвариантны для некоторого $g \in G$. Если $g^k \in C_G(H/K)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $g \in AD(G)$.*

Доказательство. Пусть $M = H/K$. Выберем $1 \neq b_1 \in M$, и положим $B_1 = \langle b_1\rangle^{\langle g\rangle}$. Поскольку элемент g индуцирует на M автоморфизм конечного порядка, подгруппа B_1 конечна. Справедливо равенство $M = B_1 \times C_1$ для некоторой подгруппы C_1. Множество $\{C_1^y \mid y \in \langle g\rangle\}$ конечно. Пусть

$$\{C_1^y \mid y \in \langle g\rangle\} = \{U_1, ..., U_m\}.$$

Отсюда следует, что $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \cdots \cap U_m = Core_{\langle g\rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в M. Пусть $1 \neq b_2 \in D_1$, и $B_2 = \langle b_2\rangle^{\langle g\rangle}$. Тогда $\langle B_1, B_2\rangle = B_1 \times B_2$. Как и ранее, устанавливаем, что $M = (B_1 \times B_2) \times C_2$ для некоторой подгруппы C_2. Продолжив рассуждения аналогичным образом, можно построить бесконечное семейство $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ неединичных $\langle g\rangle$-инвариантных подгрупп, такое, что $\langle B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}}\, B_n$. Согласно следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Лемма доказана.

Далее через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядков элементов группы G.

***Следствие* 2.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Пусть K и H – подгруппы группы G, такие, что K – нормальная подгруппа H, и H/K – периодическая почти локально разрешимая группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq AD(G)$.*

Доказательство. Пусть L/K – локально разрешимая нормальная подгруппа H/K конечного индекса. Поскольку фактор–группа H/K не является черниковской, то L/K также не является черниковской. Пусть g – произвольный элемент подгруппы H. Тогда L/K содержит абелеву $\langle g\rangle$-инвариантную подгруппу C/K, которая не является черниковской [12]. Если множество $\pi(C/K)$ бесконечно, по следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Если же $\pi(C/K)$ конечно, то существует простое число p, для которого силовская p-подгруппа P/K фактор-группы C/K не является черниковской. Отсюда вытекает, что нижний слой B/K подгруппы P/K бесконечен, и поэтому L/K содержит $\langle g\rangle$-инвариантную бесконечную элементарную абелеву подгруппу B_1/K. Согласно лемме 2.1, $g \in AD(G)$. Следствие доказано.

***Следствие* 2.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, и предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Пусть K и H – подгруппы группы G, такие, что K – нормальная подгруппа H, и H/K – локально конечная группа. Если фактор-группа H/K не является черниковской, то $H \leq AD(G)$.*

Доказательство. Пусть g – произвольный элемент подгруппы H, и пусть $C/K = C_{H/K}(gK)$. Если фактор-группа C/K не является черниковской, то по теореме 5.8 [13] C/K содержит абелеву подгруппу D/K, являющуюся прямым произведением бесконечного множества нетривиальных циклических подгрупп. Согласно следствию 1.3, $g \in AD(G)$. Предположим, что фактор-группа C/K является черниковской. Согласно [14], H/K – почти локально разрешимая группа. Применяя следствие 2.1, получаем, что

$g \in AD(G)$. Следовательно, $H \le AD(G)$. Следствие доказано.

Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

***Теорема* 2.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль. Предположим, что группа G локально конечна и удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Тогда либо группа G черниковская, либо $G = AD(G)$.*

Напомним, что кольцо $\mathbf{R}$ называется дедекиндовым кольцом, если выполняются следующие условия:

1) $\mathbf{R}$ – область целостности;
2) $\mathbf{R}$ – нетерово кольцо;
3) каждый ненулевой простой идеал кольца $\mathbf{R}$ является максимальным идеалом;
4) кольцо $\mathbf{R}$ целозамкнуто.

***Лемма* 2.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – периодическая локально разрешимая группа, $\mathbf{R}$ – дедекиндово кольцо. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из леммы 4.1 [15]. Лемма доказана.

Если G – группа, через $G_{\mathfrak{S}}$ обозначим пересечение всех нормальных подгрупп K группы G, для которых фактор-группа G/K разрешима. В случае, если группа G разрешима, через $s(G)$ обозначим ступень разрешимости группы G.

***Теорема* 2.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – периодическая локально разрешимая группа, $\mathbf{R}$ – дедекиндово кольцо. Предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Тогда фактор-группа $G/G_{\mathfrak{S}}$ разрешима.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть фактор-группа $H = G/G_{\mathfrak{S}}$ неразрешима. Пусть F_1 – произвольная конечная подгруппа H. Поскольку H аппроксимируется разрешимыми группами, существует нормальная подгруппа K_1 группы H, такая, что $F_1 \cap K_1 = \langle 1 \rangle$, и фактор-группа H/K_1 разрешима. Из нашего предположения вытекает, что подгруппа K_1 неразрешима. Поэтому ступени разрешимости конечных подгрупп группы K_1 не ограничены конкретным числом, и, следовательно, K_1 содержит конечную подгруппу D_1, такую, что $s(F_1) < s(D_1)$. Подгруппы F_1 и D_1 конечны, и поэтому разрешимы. Пусть $F_2 = D_1^{F_1}$. Тогда F_2 – конечная F_1-инвариантная подгруппа, такая, что $s(F_1) < s(F_2)$. В частности, подгруппа F_1F_2 конечна, и поэтому существует нормальная подгруппа K_2 группы H, такая, что $F_1F_2 \cap K_2 = \langle 1 \rangle$, и фактор-группа H/K_2 разрешима. Как и ранее, подгруппа K_2 неразрешима, и поэтому можно выбрать конечную F_1F_2-инвариантную подгруппу F_3 группы K_2, такую, что $s(F_2) < s(F_3)$. Продолжив наши рассуждения, построим строго возрастающий ряд конечных подгрупп $F_1 < F_1F_2 < \cdots < F_1F_2\cdots F_n < \cdots$, таких, что:

(i) F_n – F_j-инвариантная подгруппа для $j < n$;

(ii) $s(F_j) < s(F_n)$ для $j < n$;

(iii) $F_1F_2\cdots F_n \cap \langle F_j \mid j > n \rangle = \langle 1 \rangle$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Из этих условий вытекает, что для любого бесконечного подмножества Δ множества $\mathbb{N}$ подгруппа $\langle F_j \mid j \in \Delta \rangle$ разлагается в прямое произведение подгрупп $F_j, j \in \Delta$. Следовательно, подгруппа $\langle F_j \mid j > n \rangle$ неразрешима.

Предположим сначала, что G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подмножеств

$$N = \Delta(1) \supset \Delta(2) \supset \cdots \supset \Delta(k) \supset \cdots,$$

таких, что множество $\Delta(k) \setminus \Delta(k+1)$ бесконечно для любого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k = \langle F_j \mid j \in \Delta(k) \rangle$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Получим строго убывающий ряд подгрупп фактор-группы H

$$L_1 > L_2 > \cdots > L_k > \cdots,$$

такой, что индексы $|L_k : L_{k+1}|$ бесконечны. Пусть R_k – прообраз L_k в группе G. Тогда $R_1 > R_2 > \cdots > R_k > \cdots$ – строго убывающий ряд подгрупп группы G, такой, что индексы $|R_k : R_{k+1}|$ бесконечны. Следовательно, существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что коцентрализатор подгруппы R_m в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 2.2 подгруппа R_m разрешима, и поэтому разрешима фактор-группа $L_m = R_m/G_{\mathfrak{S}}$. Ранее мы показали, что подгруппа $L_m = \langle F_j \mid j \in \Delta(m) \rangle$ для любого $k \in \mathbb{N}$ неразрешима. Противоречие.

В случае, когда группа G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$, мы строим строго возрастающий ряд подмножеств множества $\mathbb{N}$ и проводим аналогичные рассуждения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phillips, R.E.* The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra. – 1988. – Vol. 119, № 2. – P. 400–448.

2. *Phillips, R.E.* Finitary linear groups: a survey. «Finite and locally finite groups» / R.E. Phillips // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluver Acad. Publ., Dordreht. – 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.

3. *Dixon, M.R.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension / M.R. Dixon, M.J. Evans, L.A. Kurdachenko // J. Algebra. – 2004. – Vol. 277, № 1. – P. 172–186.

4. *Kurdachenko, L.A.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Publ. Mat. – 2008. – Vol. 50. – P. 103–131.

5. *Зайцев, Д.И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности / Д.И. Зайцев // Укр. мат. журн. – 1968. – Т. 20. – С. 472–482.

6. *Baer, R.* Polyminimaxgruppen / R. Baer // Math. Ann. – 1968. – Vol. 175. – P. 1–43.

7. *Munoz-Escolano, J.M.* Periodic linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension / J.M. Munoz–Escolano, J. Otal, N.N. Semko // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 749–763.

8. *Курдаченко, Л.А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов / Л.А. Курдаченко // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: науч. тр. / Академия наук Украины, под ред. Черникова Н.С. – Киев, 1993. – С. 160–177.

9. *Дашкова, О.Ю.* Об одном классе модулей над групповыми кольцами локально разрешимых групп / О.Ю. Дашкова // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 94–98.

10. *Дашкова О.Ю.* Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп / О.Ю. Дашкова // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 1. – С. 44–51.

11. *Дашкова, О.Ю.* Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп / О.Ю. Дашкова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, № 7. – С. 111–119.

12. *Зайцев, Д.И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп / Д.И. Зайцев // Доклады Академии наук СССР. – 1974. – Т. 214, № 6. – С. 1250–1253.

13. *Kegel, O.H.* Locally Finite Groups / O.H. Kegel, B.A.F. Wehrfritz. – North-Holland Mathematical Library: North-Holland, Amsterdam, London, 1973. – 210 p.

14. *Hartley, B.* Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups / B. Hartley // J. London Math. Soc. – 1988. – Vol. 37, № 2. – P. 421–436.

15. *Dashkova, O.Yu.* On modules over group rings of locally soluble groups with rank restrictions on some systems of subgroups / O.Yu. Dashkova // Asian-Eur. J. Math. – 2010. – Vol. 3, № 1. – P. 45–55.

Поступила в редакцию 29.08.11.