УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев[1], **Т.И. Васильева**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

ON FINITE GROUPS WITH GENERALLY SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasilyev[1], **T.I. Vasilyeva**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. В работе изучается класс групп $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G). Получены свойства класса $w\mathfrak{F}$. В частности, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ доказано, что класс $w\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Ключевые слова: *конечная группа, силовская подгруппа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, наследственная формация, насыщенная формация.*

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty formation. A subgroup H of group G is called $\mathfrak{F}$-subnormal in G if either $H = G$ or there is a chain of subgroups $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ such that $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ for every $i = 1, \ldots, n$. In the work the class of groups $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ and every Sylow subgroup of G is $\mathfrak{F}$-subnormal in G) are studied. Properties of the class $w\mathfrak{F}$ are obtained. In particular, for hereditary saturated formation $\mathfrak{F}$ it is proved that the class $w\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation. Necessary and sufficient conditions are found, at which $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Keywords: *finite group, Sylow subgroup, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup, hereditary formation, saturated formation.*

Введение

Знание свойств вложения силовских подгрупп в группу позволяет во многих случаях найти структуру самой группы. Например, группа нильпотентна, если любая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. В 1969 году Т.О. Хоукс [1], используя формационный подход, ввел понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в конечной разрешимой группе. Предложенная им идея состояла в выделении в группе с помощью непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ семейства подгрупп, которые имеют свойства, аналогичные свойствам субнормальных подгрупп, и совпадают с последними в случае, когда $\mathfrak{F}$ есть формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G (обозначается H $\mathfrak{F}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь максимальных подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы активно изучалось в различных направлениях и нашло многочисленные приложения (см., например, [3], [4]).

В работе [5] было начато рассмотрение следующей проблемы. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Что можно сказать о структуре группы G, если все ее силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G?* В [6]–[9] были продолжены исследования по данной проблеме. Следующие полученные нами результаты относятся к этому направлению.

Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Определим класс групп $w\mathfrak{F}$ следующим образом*: $w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и всякая силовская подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G*.

По определению, единичная группа принадлежит $w\mathfrak{F}$.

***Теорема* А.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *для любой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ выполняется равенство*

$$w\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X};$$

2) *для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$, состоящей из метанильпотентных групп, выполняется равенство* $w\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$;

3) *формация* $\mathfrak{X}$ *состоит из метанильпотентных групп*.

Ввиду того что формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп состоит из метанильпотентных групп, получается

***Следствие* A.1.** $\mathrm{w}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{U}$.

***Теорема* B.** *Если* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, то* $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация*.

***Теорема* C.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$;

2) *если* G *– разрешимая минимальная не* $\mathfrak{F}$-*группа, то* G *является либо группой простого порядка, либо бипримарной дисперсивной группой; если* G *– неразрешимая минимальная не* $\mathfrak{F}$-*группа и* $\Phi(G) = 1$, *то* G *– такая монолитическая группа, что* $\mathrm{Soc}(G)$ *– неабелева группа и* $G/\mathrm{Soc}(G)$ *– примарная группа*.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

***Следствие* C.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация с условием Шеметкова. Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

***Следствие* C.2 [9].** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех* π-*нильпотентных групп. Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

***Следствие* C.3 [9].** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех* φ-*дисперсивных групп. Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной формацией, если в каждой группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп группы. Из описания таких формаций (см. [3] либо [4]) следует, что любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка; любая неразрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G с $\Phi(G) = 1$ является монолитической группой, такой, что $\mathrm{Soc}(G)$ – неабелева группа и $G/\mathrm{Soc}(G)$ является циклической примарной группой.

Применяя теорему C, получаем

Следствие C.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная решеточная формация, тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$.

***Следствие* C.5 [9].** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех* π-*разложимых групп. Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Существуют наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{w}\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Например, как установлено в [7], для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп $\mathrm{w}\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$.

Согласно теореме Гашюца-Любедезер-Шмида, любая насыщенная формация является локальной, и наоборот. В связи с теоремой B возникает следующая задача. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Как с помощью h построить максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$? Ниже предлагается решение данной задачи в случае, когда $\mathfrak{F}$ – разрешимая локальная формация полной характеристики.

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* – локальный экран, такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid$ любая силовская подгруппа из G принадлежит $h(p))$.

***Теорема* D.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная разрешимая формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbf{P}$. *Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = LF(h^*)$ *и* h^* *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\mathrm{w}\mathfrak{F}$.

***Следствие* D.1.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *– формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда* $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathfrak{S}$.

***Следствие* D.2.** $\mathrm{w}\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{S}$.

1 Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [2], [10]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе. Через $\mathbf{P}$ обозначается множество всех простых чисел; для группы G через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G; $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга, $F^*(G)$ – обобщенная подгруппа Фитинга группы G; $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, тогда $M(\mathfrak{X})$ – класс всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп, т. е. групп, у которых данному классу $\mathfrak{X}$ принадлежат все собственные подгруппы и только они; $\pi(\mathfrak{X})$ – множество всех различных простых делителей порядков групп, которые принадлежат $\mathfrak{X}$; гомоморф – класс групп, содержащий с каждой группой все ее гомоморфные образы.

Используются следующие обозначения для конкретных классов групп: $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}^2$– класс всех групп G, у которых $G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп, π – некоторое множество простых чисел; $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_\pi$ для $\pi = \{p\}$. Нам потребуются известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, которые собраны в следующих двух леммах.

***Лемма* 1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H – подгруппа из G и* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, *то* H $\mathfrak{F}$-sn G;

2) *если H* $\mathfrak{F}$-sn G, *K – подгруппа из G, то* $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-sn K;

3) *если H* $\mathfrak{F}$-sn G, *то* H^x $\mathfrak{F}$-sn G *для любого* $x \in G$.

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа группы G и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H* $\mathfrak{F}$-sn G, то HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N;

2) *если* HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N, *то* HN $\mathfrak{F}$-sn G;

3) *если H* $\mathfrak{F}$-sn K *и K* $\mathfrak{F}$-sn G, *то H* $\mathfrak{F}$-sn G.

Через $\mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G.

***Замечание* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ и $\mathrm{sn}(G)$ означает множество всех субнормальных подгрупп группы G. Тогда $\mathrm{sn}_{\mathfrak{N}}(G) \subseteq \mathrm{sn}(G)$ для любой группы G. В общем случае равенство не имеет места, как показывает пример знакопеременной группы на 5 символах $\mathrm{Alt}(5) = G$ и $1 \in \mathrm{sn}(G) \setminus \mathrm{sn}_{\mathfrak{N}}(G)$. Однако, если G разрешима, то $\mathrm{sn}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathrm{sn}(G)$.

***Замечание* 1.2.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ и $\mathrm{sn}^*(G)$ означает множество $\{H \in S(G) \mid$ либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для $i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $\mathrm{sn}_{\mathfrak{U}}(G) \subseteq \mathrm{sn}^*(G)$ для любой группы G. Если G разрешима, то $\mathrm{sn}_{\mathfrak{U}}(G) = \mathrm{sn}^*(G)$.

Будем обозначать через $\mathrm{Syl}(G)$ множество всех силовских подгрупп группы G. Тогда для непустой формации $\mathfrak{F}$ класс групп

$\mathrm{w}\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{sn}_{\mathfrak{F}}(G))$.

Из свойств силовских подгрупп группы ввиду леммы 1.2 получается

***Лемма* 1.3.** Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ – гомоморф.

***Лемма* 1.4.** Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$;

3) $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ – наследственная формация;

4) $\mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 1.1. Утверждение 2) доказывается проверкой определения класса $\mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Докажем утверждение 3). По лемме 1.3, $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ – гомоморф.

Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых $G/N_1 \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$.

Покажем, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \in \pi(G)$. Если $p \in \pi(G/N_i)$, то из $G/N_i \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ следует, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что $p \notin \pi(G/N_i)$ для $i = 1, 2$. Если $p \in \pi(N_1)$, то $P \cap N_1$ – силовская p-подгруппа из N_1 для любой силовской p-подгруппы P из G. Так как

$$|G : P \cap N_1| = |G : N_1| \cdot |N_1 : P \cap N_1|$$

не делится на p, то $P \cap N_1$ – силовская p-подгруппа из G. Отсюда ввиду $N_1 \cap N_2 = 1$ и нормальности N_2 в G следует, что $p \notin \pi(N_2)$. Тогда p делит $|G : N_2|$. Аналогично показывается, что если $p \in \pi(N_2)$, то p делит $|G : N_1|$. Это противоречит с тем, что $p \notin \pi(G/N_i)$ для $i = 1, 2$. Итак, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Возьмем любую силовскую p-подгруппу R группы G. Так как RN_i/N_i – силовская p-подгруппа в G/N_i и $G/N_i \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то RN_i/N_i $\mathfrak{F}$-sn G/N_i, $i = 1, 2$. Ввиду теоремы A.6.4 из [10], утверждения 2) леммы 1.1 и утверждения 3) леммы 1.2 подгруппа $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Получаем, что $G/N_1 \cap N_2 \cong G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Таким образом, $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ является формацией.

Для доказательства наследственности $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ возьмем $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и любую подгруппу K из G. По теореме Силова, силовская q-подгруппа T из K содержится в некоторой силовской q-подгруппе Q группы G. Из Q $\mathfrak{F}$-sn G по утверждению 2) леммы 1.1 следует $\mathfrak{F}$-субнормальность $T \cap Q = T$ в K. Утверждение 3) доказано.

Докажем утверждение 4). Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Из утверждений 3) и 1) леммы следует, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{H}$. Докажем обратное включение. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathrm{w}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Возьмем любую $Q \in \mathrm{Syl}(G)$.

Допустим, что $G = Q$. Тогда $|G| = q^n$ для некоторого простого числа q. Если $n > 1$, то по выбору G ее любая собственная подгруппа $H \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По утверждению 2) леммы получаем, что $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору G. Значит, $n = 1$. Из $G \in \mathrm{w}\mathfrak{H}$ заключаем, что $\{q\} = \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G.

Итак, $G \neq Q$, т.е. $|\pi(G)| > 1$. Так как $G \in \mathrm{w}\mathfrak{H}$, то в G найдется максимальная подгруппа M, такая, что $Q \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{H}} \subseteq M$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{H}}$. По лемме 1.3, $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{H}$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{H}$. Поэтому QN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N. Отсюда QN $\mathfrak{F}$-sn G ввиду 2) леммы 1.2.

Из наследственности $\mathrm{w}\mathfrak{H}$ и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{H}$ следует, что $QN \in \mathrm{w}\mathfrak{H}$. Так как $QN \neq G$, $QN \in \mathfrak{H}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $Q \in \mathrm{Syl}(QN)$, Q $\mathfrak{F}$-sn QN. По 3) леммы 1.2 Q $\mathfrak{F}$-sn G. Получили, что $G \in \mathfrak{H}$. Это противоречит выбору G. Лемма доказана.

***Лемма* 1.5.** Для формации $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп $\mathrm{w}\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}$ – наследственная формация и $\pi(\mathfrak{A}) = \mathbf{P}$, то из утверждения 2) леммы 1.4 вытекает, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{A}$. Докажем обратное включение. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда $|\pi(G)| > 1$. Возьмем любую $P \in \mathrm{Syl}(G)$. Из $G \neq P$ и $\mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{sn}_{\mathfrak{A}}(G)$ следует, что найдется максимальная подгруппа M из G, такая, что $P \subseteq M$ и коммутант $G' \subseteq M$. Ввиду наследственности $\mathrm{w}\mathfrak{A}$ и выбора G заключаем, что $M \in \mathfrak{N}$. Так как $P \in \mathrm{Syl}(M)$ и M нормальна в G, то подгруппа P нормальна в G. Получили, что $G \in \mathfrak{N}$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

***Лемма* 1.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная разрешимая формация. Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, но $G \notin \mathfrak{S}$. Тогда для силовской подгруппы H из G найдется цепь максимальных подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. По 3) леммы 1.4 и выбору G подгруппа $H_{n-1} \in \mathfrak{S}$. Отсюда и из разрешимости $G/G^{\mathfrak{F}}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{S}$. Получили противоречие с выбором G. Лемма доказана.

2 Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы A. Очевидно, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Предположим, что выполняется утверждение 2) теоремы и из него не следует утверждение 3). Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{X}$ и $G \notin \mathfrak{N}^2$. Из наследственности класса $\mathfrak{X}$ и насыщенности формации $\mathfrak{N}^2$ следует, что G – минимальная не $\mathfrak{N}^2$-группа и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

1. Группа G не является простой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $N \in \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{S}$ и $G/N \in \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{S}$, то группа G разрешима. Тогда N – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Поскольку $\mathfrak{N}^2$ – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N – $\mathfrak{N}^2$-корадикал группы G. Из $G/N \in \mathfrak{N}^2$ и $G \notin \mathfrak{N}^2$ следует, что G/N не является нильпотентной группой.

Пусть $R \in \mathrm{Syl}(G)$. Обозначим $K = NR$. Тогда $K \neq G$. Так как N – $\mathfrak{N}^2$-корадикал группы G, из утверждения 1) леммы 1.1 получаем, что K – $\mathfrak{N}^2$-субнормальная подгруппа группы G. Отсюда и из $K \in \mathfrak{N}^2$ по лемме 1.1 следует, что R является $\mathfrak{N}^2$-субнормальной подгруппой группы G. Это означает, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{N}^2$. Ввиду выполнения утверждения 2) теоремы получаем, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Это противоречит выбору G. Тем самым доказано, что всякая разрешимая $\mathfrak{X}$-группа принадлежит $\mathfrak{N}^2$.

2. Группа G является простой. Тогда G – неабелева группа. В G найдется группа Шмидта S. По теореме 26.1 из [2], $S = PQ$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – силовская q-подгруппа группы S, $p \neq q$. Обозначим $A = A_K(G)$ фраттиниев модуль [11] группы G над полем $K = F_q$. Из $q \in \pi(G)$ следует, что $A \neq Q$. Ввиду теоремы 3 из [11] и $O_{q'}(G) = 1$ получаем, что A – точный F_qG-модуль. Тогда по известному результату Гашюца [12] существует групповое расширение $A \to E \to G$ с $A \subseteq \Phi(E)$. В группе E имеется элементарная абелева q-группа N, такая, что $E/N \cong G$, $N \overset{G}{\cong} A$ и $N \subseteq \Phi(E)$. Из $E/N \cong G \in \mathfrak{X}$ следует, что $E/\Phi(E) \in \mathfrak{X}$. Поэтому $E \in \mathfrak{X}$, так как формация $\mathfrak{X}$ насыщена.

Обозначим через $\overline{S}$ прообраз подгруппы S группы G при естественном гомоморфизме

$$\varphi : E \to E/N.$$

Так как $E/N \cong G$, то группы E/N и G можно отождествить. Из $S \in \mathfrak{N}^2$, точности действия G на модуле A и $N \overset{G}{\cong} A$ следует, что $\overline{S} \in \mathfrak{N}^3 \setminus \mathfrak{N}^2$. Ввиду $E \in \mathfrak{X}$ и наследственности $\mathfrak{X}$ получаем, что $\overline{S} \in \mathfrak{X}$. Отметим, что группа $\overline{S}$ разрешима. По доказанному выше, разрешимая $\mathfrak{X}$-группа $\overline{S}$ принадлежит $\mathfrak{N}^2$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что из утверждения 1) следует 2).

Допустим теперь, что выполняется утверждение 3) и из него не следует утверждение 1). Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{X}$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, любая силовская подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G, но $G \notin \mathfrak{F}$ для некоторой насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}^2$ следует, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Так как насыщенная формация является локальной и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то G – ненильпотентная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 1.2 любая силовская подгруппа из G/N является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы G/N. Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\Phi(G) = 1$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Поэтому в G найдется максимальная подгруппа M, такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Отметим, что N – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p и $N = C_G(N) = F(G)$. Учитывая, что $G \in \mathfrak{N}^2$, получаем $G/N \cong M \in \mathfrak{N}$. Отсюда, согласно лемме 3.9 из [2], M является холловой p'-подгруппой в G.

Если M – силовская q-подгруппа для некоторого простого числа $q \neq p$, то из $\mathfrak{F}$-субнормальности M в G следует, что $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Получили противоречие.

Значит, M не является силовской подгруппой группы G. Обозначим через Q произвольную силовскую q-подгруппу группы G, где $q \neq p$. Подгруппа $H = NQ \neq G$. Из $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ по лемме 1.1 следует, что любая силовская подгруппа группы H является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в H. Ввиду выбора

G подгруппа $H \in \mathfrak{F}$. Из $N = C_G(N)$ получаем $N = F_p(H)$. Ввиду леммы 4.5 из [2] для некоторого локального экрана f формации $\mathfrak{F}$ факторгруппа $H/F_p(H) \cong Q \in f(p)$. Поэтому любая силовская q-подгруппа группы M принадлежит $f(p)$. Так как M нильпотентна, то $M \in f(p)$. Отсюда и из $G/N \cong M$ следует, что N является f-центральным главным фактором группы G. Учитывая это и $G/N \in \mathfrak{F}$, имеем $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Теорема доказана.

Доказательство теоремы В. По лемме 1.4, $w\mathfrak{F}$ является наследственной формацией. Докажем насыщенность $w\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G/\Phi(G) \in w\mathfrak{F}$, но $G \notin w\mathfrak{F}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in w\mathfrak{F}$, то $G/N/\Phi(G/N) \in w\mathfrak{F}$. По выбору G получаем, что $G/N \in w\mathfrak{F}$.

Класс $w\mathfrak{F}$ является формацией, поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, $N \subseteq \Phi(G)$. Отсюда следует, что N – p-группа для некоторого простого числа p и $O_{p'}(G) = 1$. Пусть Q – произвольная силовская q-подгруппа группы G.

Если $q = p$, то QN/N – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Из $N \subseteq Q$ и леммы 1.2 следует $\mathfrak{F}$-субнормальность $QN = Q$ в G.

Пусть $q \neq p$. Обозначим $H = Q\widetilde{F}(G)$, где $\widetilde{F}(G)$ – такая подгруппа группы G, что $\widetilde{F}(G) \supseteq \Phi(G)$ и $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ является цоколем группы $G/\Phi(G)$. Тогда $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. Поэтому $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(H/\Phi(G))$. Отсюда $H/\Phi(G) = Q\Phi(G)/\Phi(G)F^*(H/\Phi(G))$.

Так как $Q\Phi(G)/\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $H/\Phi(G)$ и $Q\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ ввиду $\pi(G/\Phi(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и локальности $\mathfrak{F}$, то по теореме 6.1.11 из [4] $H/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда для максимального внутреннего локального экрана f формации $\mathfrak{F}$ H действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Отсюда ввиду $O_{p'}(G) = 1$ по теореме 9.18 из [2] H действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.1 получаем, что Q – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы QN. Так как QN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по лемме 1.2 Q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Итак, $G \in w\mathfrak{F}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы С. Установим, что из утверждения 1) следует 2). Допустим, что группа $G \in M(\mathfrak{F})$.

Предположим вначале, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G.

Если $N = G$, то либо $|G| = p$ для некоторого простого p, либо G – простая неабелева группа, $G = Soc(G)$ и $G/Soc(G) \cong 1$.

Допустим, что $N \neq G$. В G найдется максимальная подгруппа M, такая, что $G = NM$. Из $G/N \cong M/M \cap N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} = N$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Если $NQ \neq G$ для любой силовской подгруппы Q группы G, то $NQ \in \mathfrak{F}$. Тогда из утверждения 1) леммы 1.1 и утверждения 3) леммы 1.2 следует, что Q $\mathfrak{F}$-sn G. Поэтому $G \in w\mathfrak{F}$. Ввиду выполнимости утверждения 1) теоремы получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Значит, $NQ = G$ для некоторой $Q \in \mathrm{Syl}(G)$.

Если G разрешима, то N – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $|\pi(G)| > 1$ следует, что Q – q-группа для простого $q \neq p$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, группа G ненильпотентна.

В случае неразрешимости G получаем, что $N = \mathrm{Soc}(G)$ – неабелева группа, $G/N \cong Q/Q \cap N$ – примарная группа. Итак, при $\Phi(G) = 1$ для группы G утверждение 2) выполняется.

Предположим теперь, что $\Phi(G) \neq 1$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G/\Phi(G) \notin \mathfrak{F}$. Тогда $G/\Phi(G) \in M(\mathfrak{F})$ и при этом $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$. Если G разрешима, то по доказанному выше либо $G/\Phi(G)$ – группа простого порядка, либо $G/\Phi(G)$ – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа. Отсюда и из выбора G следует, что G – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа.

Если G неразрешима, то $G/\Phi(G)$ неразрешима и, по доказанному выше, $G/\Phi(G)$ – монолитическая группа, такая, что $\mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$ – неабелева группа и $G/\Phi(G)/\mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$ либо является примарной группой, либо изоморфна 1. Итак, доказано, что из 1) следует 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Допустим противное. Пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, любая силовская подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, но G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как $w\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $G/\Phi(G) \in w\mathfrak{F}$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ ввиду выбора G. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Итак, $\Phi(G) = 1$. Из наследственности $w\mathfrak{F}$ заключаем, что любая собственная подгруппа группы G принадлежит $w\mathfrak{F}$, а значит, и $\mathfrak{F}$ ввиду выбора G. Следовательно, $G \in M(\mathfrak{F})$.

Предположим, что G разрешима. Из утверждения 2) теоремы и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ заключаем, что G – ненильпотентная бипримарная дисперсивная группа. По теореме 24.5 из [2], $G^{\mathfrak{F}}$ – силовская p-подгруппа группы G для некоторого простого p. Так как в G для $q \neq p$ силовская q-подгруппа $Q \neq G$ и $G \in w\mathfrak{F}$, то в G найдется максимальная подгруппа M, такая, что $G^{\mathfrak{F}}Q \subseteq M$. Получили противоречие $G \subseteq M \subset G$.

Допустим, что G неразрешима. Так как $G \in w\mathfrak{F}$ и G непримарна, то для любой силовской подгруппы Q группы G найдется максимальная подгруппа, содержащая Q и $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то G – непростая группа. Ввиду выполнения утверждения 2) теоремы G – монолитическая группа, $G/\mathrm{Soc}(G)$ – примарная группа. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{Soc}(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $G^{\mathfrak{F}} = \mathrm{Soc}(G)$. Значит, $G = G^{\mathfrak{F}}Q$ для некоторой силовской подгруппы Q из G. Но тогда найдется максимальная подгруппа M группы G, такая, что $G = G^{\mathfrak{F}}Q \subseteq M$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы D. Обозначим через $\mathfrak{F}^* = LF(h^*)$. Покажем, что $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Вначале покажем, что $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Допустим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathrm{w}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^*$ – наследственные насыщенные формации, то группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{F}^*}$ и $\Phi(G) = 1$. Кроме того, G является минимальной не $\mathfrak{F}^*$-группой. Можно показать, что $|\pi(G)| \leq 2$ и $G = NM$, где $N \cap M = 1$, M – некоторая максимальная подгруппа группы G, являющаяся минимальной не $h^*(p)$-группой. Отметим также, что M является q-группой, где q – некоторое простое число, отличное от p. Из $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}^2$ по теореме A следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие с выбором группы G.

Покажем, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Допустим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}^*$ и $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ – наследственные насыщенные формации, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = G^{\mathrm{w}\mathfrak{F}}$ и $\Phi(G) = 1$. Кроме того, G является минимальной не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группой.

По 4) леммы 1.4, $\mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Тогда из 2) теоремы **C** и выбора G следует, что G является бипримарной дисперсивной группой. Нетрудно показать, что G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Поэтому $G = NM$, где $N \cap M = 1$, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N = F(G) = C_G(N)$, а M – максимальная подгруппа, являющаяся q-группой, где q – некоторое простое число, отличное от p. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/N = G/F_p(N) \cong M \in h^*(p)$. Ввиду построения экрана h^* получаем, что $M \in h(p)$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawkes, T.* On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.
2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Бел. навука, 2003. – 254 с.
4. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
5. *Васильев, А.Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
6. *Васильева, Т.И.* Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
7. *Васильев, А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
8. *Васильев, А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
9. *Семенчук, В.Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Матем. заметки. – 2011. – Vol. 89, № 1. – P. 104–108.
10. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
11. *Griess, R.* The Frattini module / R. Griess, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 256–266.
12. *Gaschütz, W.* Über die modularen Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert warden / W. Gaschütz // Math. Z. – 1954. – Bd. 60. – S. 274–286.

Поступила в редакцию 09.09.11.