УДК 512.542

О НЕДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ ВСЕХ *n*-КРАТНО *ω*-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.А. Царев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON NON-DISTRIBUTIVITY OF THE LATTICE OF ALL *n*-MULTIPLY *ω*-COMPOSITION FORMATIONS

A.A. Tsarev

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Пусть $n \geqslant 0$ и ω – бесконечное множество простых чисел. Доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n.

Ключевые слова: *конечная группа, формация групп, ω-композиционный спутник формации, недистрибутивная решетка.*

Let $n \geqslant 0$ and ω be an infinite set of primes. It is proved that the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations is not distributive.

Keywords: *finite group, formation of groups, ω-composition satellite of formation, non-distributive lattice.*

Введение

В 1986 г. А.Н. Скибой [1] была установлена модулярность решетки всех (насыщенных) формаций. Впоследствии этот факт нашел много приложений в вопросах классификациии насыщенных формаций (см. [2]–[4]) и был развит в работах других авторов. Это послужило мотивацией для нахождения модулярных и дистрибутивных решеток формаций иных типов (n-кратно насыщенных [2], p-насыщенных [5], n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных [6], тотально насыщенных [7], [8], τ-замкнутых тотально насыщенных [9], n-кратно Ω-канонических и n-кратно Ω-биканонических [10], Ω-расслоенных формаций мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами [11]).

В недавно опубликованных работах [12], [13] было доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ модулярна. Дополняя последний результат, в данной заметке мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n.*

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [2], [3], [6].

1 Предварительные сведения

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Символы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначают класс всех групп и класс всех p'-групп соответственно.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой функтор* (в смысле А.Н. Скибы [3]), если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Если $\tau(G) = \{G\}$, то функтор τ называется *тривиальным*. Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* [3], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы G из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символом $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$. Символами $O_p(G)$ и $R_{\omega}(G)$ обозначаются наибольшая нормальная p-подгруппа группы G и наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G соответственно. Символ

$C^p(G)$ обозначает пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет главных факторов с таким свойством, то полагают $C^p(G)=G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}^+(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. В частности, для группы G символ $\mathrm{Com}^+(G)$ обозначает класс всех простых абелевых групп A таких, что A изоморфна некоторому композиционному фактору группы G.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f:\omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \quad (1.1)$$

Следуя [6], сопоставим функции f класс групп

$$CF_\omega(f)=\big(G \mid G/R_\omega(G)\in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G)\in f(p) \text{ для всех } p\in\omega\cap\pi(\mathrm{Com}^+(G))\big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-композиционной формацией* с ω-композиционным спутником f.

Всякая формация считается 0-кратно ω-композиционной, а при $n>0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-композиционной* [6], если $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n–1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и для любой полной решетки формаций Θ через $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то вместо $\Theta\mathrm{form}\{G\}$ пишут $\Theta\mathrm{form}\,G$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной Θ-формацией*. Напомним, что спутник f называется *Θ-значным*, если все его значения принадлежат решетке Θ. Символом Θ^{ω_c} обозначается полная решетка формаций, обладающих Θ-значным ω-композиционным спутником (см. [6]).

Относительно включения $\subseteq$ совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c_{\omega_n}^{\tau}$ является полной решеткой. Символом $c_{\omega_n}^{\tau}\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых n-кратно ω-композицион-ных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Для произвольных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагают $\mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{F}_2 = c_{\omega_n}^{\tau}\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2)$.

Пусть $\{f_i \mid i\in I\}$ – совокупность ω-композиционных $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значных спутников. Через $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначают такой ω-композиционный спутник m, что $m(a)=\bigcap_{i\in I} f_i(a)$ для всех $a\in\omega\bigcup\{\omega'\}$. Через $\vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}(f_i \mid i\in I)$ обозначают такой ω-композиционный спутник f, что

$$f(a)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\Big)$$

для всех $a\in\omega\bigcup\{\omega'\}$, в частности,

$$(f_1\vee_{\omega_{n-1}}^{\tau} f_2)(a)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\,\mathrm{form}\big(f_1(a)\bigcup f_2(a)\big),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(a)\neq\varnothing$. Если же $f_i(a)=\varnothing$ для всех $i\in I$, то полагают $f(a)=\varnothing$.

***Лемма* 1.1** [6, лемма 2]. *Пусть* $\mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i=CF_\omega(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, *где* $f=\bigcap_{i\in I} f_i$.

Пусть $\{f_i \mid i\in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.1 $f=\bigcap_{i\in I} f_i$ – ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным*.

***Лемма* 1.2** [6, лемма 5]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F}=c_{\omega_n}^{\tau}\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, *где* $n\geqslant 1$, $\pi=\omega\cap\pi\big(Com^+(\mathfrak{X})\big)$ *и пусть* f *– минимальный ω-композиционный* $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega')=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\big(G/R_\omega(G) \mid G\in\mathfrak{X}\big)$;

2) $f(p)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\big(G/C^p(G) \mid G\in\mathfrak{X}\big)$ *для всех* $p\in\pi$;

3) $f(p)=\varnothing$ *для всех* $p\in\omega\setminus\pi$;

4) *если* $\mathfrak{F}=CF_\omega(h)$ *и спутник* h $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$*-значен, то для всех* $p\in\pi$ *имеет место*

$$f(\omega')=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\big(A \mid A\in h(\omega')\cap\mathfrak{F},\ R_\omega(A)=1\big) \text{ и}$$

$$f(p)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}\big(A \mid A\in h(p)\cap\mathfrak{F},\ O_p(A)=1\big).$$

***Лемма* 1.3** [14, лемма 2]. *Пусть* Z_p *– группа простого порядка* p *и* G *– группа с* $O_p(G)=1$. *Тогда база регулярного сплетения* $T=Z_p\wr G$ *совпадает с* $C^p(T)=O_p(T)$.

Следуя [3], полную решетку формаций Θ^{ω_c} называют *индуктивной*, если для произвольного набора $\{\mathfrak{F}_i=CF_\omega(f_i) \mid i\in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i\in\Theta^{\omega_c}$ и для любого набора $\{f_i \mid i\in I\}$ внутренних ω-композиционных Θ-значных спутников f_i имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i\in I\big)=CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i\in I)\big).$$

***Лемма* 1.4** [13, теорема 2.1]. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций* $c_{\omega_n}^{\tau}$ *индуктивна.*

***Лемма* 1.5** [3, следствие 4.2.8]. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций l_n^τ модулярна, но не дистрибутивна.*

Полагают $f \le h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$.

***Лемма* 1.6** [6, лемма 6]. *Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω-композиционные $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \le f_2$.*

Пусть Θ – полная решетка формаций. Формации, принадлежащие Θ, называют Θ-*формациями* [3]. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Группа G называется $\mathfrak{X}$-*группой*, если $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой* [3], если для любого терма $\xi(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_\Theta\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \bigcap \xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\dots,A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta\mathrm{form}\, A_1,\dots,\Theta\mathrm{form}\, A_m).$$

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 4.1.16 из монографии [3].

***Лемма* 1.7.** *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c_{\omega_n}^\tau$ $\mathfrak{G}$-отделима.*

***Лемма* 1.8** [3, лемма 4.2.4]. *Пусть Θ – $\mathfrak{X}$-отделимая решетка формаций, η – такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные Θ-подформации вида $\Theta\mathrm{form}\, A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_\Theta\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных Θ-формаций из η.*

2 Доказательство теоремы

***Лемма* 2.1.** *Пусть $n \geqslant 1$ и пусть f_i – минимальный ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $f = f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2$ – минимальный ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $h = f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2$, а f – минимальный ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, и пусть

$$\pi_1 = \omega \bigcap \pi\left(\mathrm{Com}^+(\mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2)\right) \text{ и}$$

$$\pi_2 = \omega \bigcap \pi\left(\mathrm{Com}^+(\mathfrak{F})\right).$$

Нетрудно заметить, что $\pi_1 = \pi_2$.

Покажем, что $f = h$. Пусть $\pi = \pi_1 = \pi_2$. Ввиду леммы 1.2

$$f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2\right) =$$
$$= c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \bigcup\right.$$
$$\left.\bigcup c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)\right) =$$
$$= c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(f_1(\omega') \bigcup f_2(\omega')\right) =$$
$$= (f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(\omega') = h(\omega').$$

Если $p \in \pi$, то по лемме 1.2

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2\right) =$$
$$= c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \bigcup\right.$$
$$\left.\bigcup c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)\right) =$$
$$= c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(f_1(p) \bigcup f_2(p)\right) = (f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2)(p) = h(p).$$

Если $p \in \omega \setminus \pi$, то согласно лемме 1.2 $f_i(p) = \varnothing$ для любого $i = 1, 2$. В этом случае

$$h(p) = \left(f_1 \vee_{\omega_{n-1}}^\tau f_2\right)(p) = \varnothing = f(p).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 2.2.** *Пусть формация $\mathfrak{F}_i = c_{\omega_n}^\tau \mathrm{form}\, B_i$, $i = 1, 2$, такова, что $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2)$, и пусть f_i и f – минимальные ω-композиционные $c_{\omega_{n-1}}^\tau$-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $f(p) = f_1(p) \bigcap f_2(p)$.*

Доказательство. Пусть $h = f_1 \bigcap f_2$. Тогда по лемме 1.1 $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$. Пусть $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2)$. Покажем, что $f(p) = h(p)$. Ввиду леммы 1.2

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(A \mid A \in h(p), O_p(A) = 1\right).$$

Так как $p \notin \pi(A_1, A_2)$, то $O_p(A_1) = O_p(A_2) = 1$. По лемме 1.3 $B_i / C^p(B_i) = B_i / O_p(B_i) \cong A_i$, $i = 1, 2$. Значит, по лемме 1.2

$$f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(B_i / C^p(B_i)\right) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\, A_i.$$

Так как $A_i \in \mathfrak{G}_{p'}$, то $f_i(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\, A_i \subseteq \mathfrak{G}_{p'}$. Тогда для любой группы $A \in f_i(p)$ имеет место $O_p(A) = 1$. Значит,

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(A \mid A \in f_1(p) \bigcap f_2(p), O_p(A) = 1\right) =$$
$$= c_{\omega_{n-1}}^\tau \mathrm{form}\left(f_1(p) \bigcap f_2(p)\right) = f_1(p) \bigcap f_2(p) = h(p).$$

Лемма доказана.

Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_{\omega_n}^\tau\}$ через $\overline{\xi}$ обозначается (см. [3]) терм сигнатуры

$\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}\}$, получаемый из терма ξ заменой каждого вхождения символа $\vee^{\tau}_{\omega_n}$ символом $\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}$.

Лемма 2.3. *Пусть* $\xi(x_1,\dots,x_m)$ *– терм сигнатуры* $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$, f_i *– внутренний ω-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *где* $i = 1,\dots,m;$ $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m) = CF_{\omega}\left(\overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)\right).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 1.1 и 1.4.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1,\dots,x_m) = \xi_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a})\Delta\xi_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$,

$$\{x_{i_1},\dots,x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1},\dots,x_{j_b}\} = \{x_1,\dots,x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1, ξ_2 выполняется. Тогда по индукции

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a}) = CF_{\omega}\left(\overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\right) \text{ и}$$

$$\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) = CF_{\omega}\left(\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})\right).$$

Понятно, что оба спутника $\overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})$ и $\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})$ внутренние. Значит, по индукции

$$\xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m) = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a})\Delta\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b}) =$$
$$= CF_{\omega}\left(\overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\overline{\Delta}\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})\right) =$$
$$= CF_{\omega}\left(\overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)\right),$$

где $\overline{\Delta} = \bigcap$, если $\Delta = \bigcap$, и $\overline{\Delta} = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, если $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_n}$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть формация* $\mathfrak{F}_i = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\,B_i$, $i = 1,\dots,m$, *такова, что* $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ *и* $p \notin \pi(A_1,\dots,A_m)$, *и* f_i *– минимальный ω-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$. *Пусть* $\xi(x_1,\dots,x_m)$ *– терм сигнатуры* $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$ *и* f *– минимальный ω-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F} = \xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$. *Тогда* $f(p) = \overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)(p)$.

Доказательство. Пусть $h = \overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)$. Тогда по лемме 2.3 $\xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m) = CF_{\omega}(h)$. Пусть $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1,\dots,A_m)$. Покажем, что $h(p) = f(p)$. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$.

Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 2.1 и 2.2.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1,\dots,x_m) = \xi_1(x_{i_1},\dots,x_{i_a})\Delta\xi_2(x_{j_1},\dots,x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee^{\tau}_{\omega_n}\}$,

$$\{x_{i_1},\dots,x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1},\dots,x_{j_b}\} = \{x_1,\dots,x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1, ξ_2 выполняется. Тогда по индукции

$$h_1(p) = \overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})(p) \text{ и}$$
$$h_2(p) = \overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b})(p),$$

где h_1, h_2 – минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные спутники формаций $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_a})$ и $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Значит, по индукции

$$f(p) = h_1(p)\overline{\Delta}h_2(p) = \overline{\xi}_1(f_{i_1},\dots,f_{i_a})\overline{\Delta}\overline{\xi}_2(f_{j_1},\dots,f_{j_b}) =$$
$$= \overline{\xi}_1\left(f_{i_1}(p),\dots,f_{i_a}(p)\right)\overline{\Delta}\overline{\xi}_2\left(f_{j_1}(p),\dots,f_{j_b}(p)\right) =$$
$$= \overline{\xi}\left(f_1(p),\dots,f_m(p)\right) = \overline{\xi}(f_1,\dots,f_m)(p) = h(p).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда ввиду леммы 1.5 решетка всех τ-замкнутых формаций $c^{\tau}_{\omega_0}$ не является дистрибутивной.

Пусть $n > 0$ и решетка $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ не дистрибутивна. Предположим, что решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ дистрибутивна. Пусть A_1, A_2, A_3 – произвольные группы. Пусть формация $\mathfrak{F}_i = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\,B_i$, $i = 1,2,3$, такова, что $B_i = Z_p \wr A_i$, $p \in \omega$ и $p \notin \pi(A_1, A_2, A_3)$. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \bigcap (\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_3) = (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_2) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_3).$$

Пусть f, h, f_i – минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные спутники формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigcap (\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_3)$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_2) \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_3)$ и $\mathfrak{F}_i$ соответственно. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, то по лемме 1.6 $f(p) = h(p)$.

Так как $p \notin \pi(A_1, A_2, A_3)$, то $O_p(A_i) = 1$ для всех $i = 1, 2, 3$. Тогда ввиду леммы 1.3 $B_i / C^p(B_i) = B_i / O_p(B_i) \cong A_i$ для всех $i = 1, 2, 3$. Значит, по лемме 1.2

$$f_i(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\left(B_i / C^p(B_i)\right) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_i.$$

Следовательно, по лемме 2.4,

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_1 \bigcap$$
$$\bigcap\left((c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_2) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_3)\right) =$$
$$=(c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_1 \cap c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_2) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_1 \cap$$
$$\cap\, c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,A_3) = h(p).$$

Тогда, ввиду лемм 1.7 и 1.8, решетка $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ дистрибутивна. Противоречие. Таким образом, при любых целых неотрицательных n решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ не является дистрибутивной. Теорема доказана.

В случае $n = 1$ из теоремы непосредственно вытекает

***Следствие* 2.1.** *Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций не дистрибутивна.*

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то справедливо

***Следствие* 2.2.** *Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех n-кратно ω-композиционных формаций не дистрибутивна при любом целом неотрицательном n.*

При $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

***Следствие* 2.3.** *Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех ω-композиционных формаций не дистрибутивна.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

***Следствие* 2.4.** *Решетка всех n-кратно композиционных формаций не дистрибутивна при любом целом неотрицательном n.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получаем

***Следствие* 2.5.** *Решетка всех композиционных формаций не дистрибутивна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба, А.Н.* О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // В сб. : Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

2. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 254 с.

3. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

4. *Guo, Wenbin.* The theory of classes of groups / Wenbin Guo. – Beijing – New York – Dordrecht – Boston – London : Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000. – 325 p.

5. *Ballester-Bolinches, A.* On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

6. *Скиба, А.Н.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

7. *Safonov, V.G.* On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.

8. *Safonov, V.G.* On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.

9. *Сафонов, В.Г.* О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Украинский матем. журн. – 2006. – Т. 58, № 6. – С. 852–858.

10. *Скачкова, Ю.А.* Решетки Ω-расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 2. – С. 85–94.

11. *Ведерников, В.А.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина // Сибирский матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

12. *Жизневский, П.А.* О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

13. *Воробьев, Н.Н.* О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.

14. *Скиба, А.Н.* О минимальном композиционном экране композиционнной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Гомель : Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.

Поступила в редакцию 15.08.11.