В. И. Мироненко
Факультет математики и технологий программирования,
кафедра дифференциальных уравнений и теории функций

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

1. Анри Пуанкаре определил математику как искусство разные вещи называть одним и тем же именем. Для трех пальцев, трех яблок,

трех стульев, трех идей у математика есть только одно имя: «три». Обучая математике, мы должны донести до ученика эту великую идею. Это можно сделать только через приложения математики к другим областям человеческого знания. Так как главным потребителем математики является физика, то преподавать математику без использования физики нельзя. Здесь мы говорим о физике только потому, что применение математики в физике хорошо известно и общедоступно. Нам нужно работать над тем, чтобы простые задачи экологии, биологии, социологии, химии и других наук также стали широко известными.

2. Всякая лекция должна учитывать состав аудитории, ее подготовленность к восприятию соответствующего материала, ее настроение, зависящее от разных условий. В соответствии с этим характер лекции должен меняться. Это значит, что лектору необходимо менять темп, характер, форму лекции в зависимости от конкретных условий, а не высвечивать на экране текст лекции и читать его, сопровождая чтение своими комментариями.

3. Недопустимо приучать учащихся (школьников в особенности) к так называемым презентациям, на которых они презентуют только непонимание ими излагаемого материала и формальное отношение к делу, показывая только то, что они умеют читать, возможно, без должной интонации.

4. Мы должны учитывать, что в настоящее время на математику и физику идут наименее подготовленные абитуриенты. При проведении занятий с ними следует важные положения теории повторять неоднократно.

Предыдущие пункты представляют собой тезисы, использование которых в каждом конкретном случае требует дополнительного осмысления.

Пусть, к примеру, нам нужно разъяснить студентам понятие вектора. Вектор – это математическое «имя», поэтому, согласно Пуанкаре, за ним должно скрываться много разных вещей. Эти «вещи» должны уметь складываться и умножаться на числа, а сами действия сложения и умножения на числа должны подчиняться аксиомам линейного пространства. Из этих двух действий сложение есть главное, так как умножение, скажем на два, есть просто сложение одного объекта с таким же объектом. Это значит, что при ответе на вопрос, являются ли данные объекты векторами, мы должны только выяснить, могут ли они складываться и является ли это сложение коммутативным и ассоциативным.

Например, мы хотим выяснить, образуют растворы соли в воде векторное пространство или нет? Для этого мы задаем вопрос: «Умеют ли растворы соли в воде складываться?» Ответ: «Да, они умеют складываться!» Для сложения раствора А из одной чашки с раствором В из другой чашки их оба нужно слить и перемешать. Тогда мы получаем снова раствор соли в воде. Это сложение коммутативно, так как А+В и В+А есть тот же раствор. Это сложение будет также и ассоциативно. В самом деле, если взять три раствора А, В, С, то их сумму можно получить, смешав сначала А и В, а затем добавив к (А+В) раствор С. Суммарный раствор (А+В)+С будет, очевидно, таким же, как и раствор А+(В+С), т.е. (А+В)+С=А+(В+С). Это значит, что сложение растворов соли в воде и коммутативно и ассоциативно, а множество растворов соли в воде образуют векторное пространство.

Думающие студенты, знающие определение векторного пространства, обычно ставят вопрос: «А что здесь является обратным элементом?» Но напоминание об обратном элементе во множестве действительных чисел, который интерпретируется как долг (нехватка), обычно снимает этот вопрос. (Вопрос преподавателя о том, что во множестве растворов является нулевым вектором, обычно провоцирует студентов задать предыдущий вопрос.)

После того, как мы выяснили, что растворы соли в воде образуют векторное пространство, встает вопрос о его размерности, т. е. о том, сколько у него компонент. Если это пространство конечномерно, то оно (как говорит известная теорема из линейной алгебры) изоморфно пространству R^n с некоторым n. Образно говоря, оно похоже на это пространство.

Здесь разумно было бы вспомнить, как доказывается эта теорема. Тогда мы приходим к выводу, что каждый раствор соли в воде можно охарактеризовать парой чисел $(x; y)$, где $x-$количество грамм соли, а $y-$количество грамм воды. Естественно, что когда мы складываем два раствора $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то получим раствор $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, т. е. соль складывается с солью, а вода с водой. Каждый раствор состоит из двух компонент (соль и вода) и сложение производится по компонентам. Это пространство двухмерное, и потому оно подобно (изоморфно) R^2, а значит и пространству направленных отрезков на плоскости.

Мы учим детей складывать на палочках, но мы учим их складывать вовсе не только палочки. Точно также, когда мы учим детей складывать направленные отрезки, мы должны научить их складывать не только палочки со стрелочками. Если после сказанного выше мы попросим учащихся привести примеры трехмерных векторов, многие из них сделают это с удовольствием. После этого, например, нетрудно догадаться, что склады с крупой (гречневая, перловая, рисовая, пшенная) образуют векторное пространство четвертой размерности. Теперь становится ясно, что векторные пространства в экономике должны играть особую важную роль.

Проведем дальнейшие рассуждения, поставив вопрос: «Имеет ли смысл понятие параллельности (коллинеарности) в пространстве растворов соли в воде? В алгебре или геометрии мы доказываем, что два вектора (x_1, y_1) и (x_2, y_2) параллельны, если их координаты пропорциональны, т.е. $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$ и, значит, $\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1}{y_1}$. Таким образом, вместо математического термина «параллельны (коллинеарны)» мы здесь говорим о двух растворах одной и той же концентрации.

Нормировано ли это пространство и если да, то какова его норма: $\sqrt{x^2+y^2}$ или $\max\{|x|;|y|\}$? После недолгих размышлений мы приходим к выводу, что нормой в этом пространстве является масса раствора $\|(x;y)\|=|x|+|y|$.

Студенты с особым интересом воспринимают вышеизложенные утверждения. Причем, как нетрудно увидеть, доказательства некоторых положений теории векторных пространств (например, теорема об изоморфизме) становятся особенно наглядными.

Другим примером векторного пространства может быть пространство цвета. Здесь, однако, нужно быть осторожным и понимать возможность интерпретации пространства цвета как трехмерного, осуществляемого в телевизоре (компьютере), и как – бесконечномерного – т. е. разложения каждого цвета в ряд Фурье. Мыслящий преподаватель всегда для математического термина («имени») найдет соответствующие «вещи» из других областей человеческих знаний. Важно только, чтобы эти «вещи» не были случайны и поверхностны.