Проблемы физики, математики и техники, № 3 (8), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 512.547

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ F_2 ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ С МАЛЫМИ КЛЕТКАМИ ЖОРДАНА

О.И. Тавгень[1], Ду Цзюньхуа[2], Лю Сщуньянь[3]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск*
[2]*Институт естественных наук Цицикарского университета, Цицикар, Китай*
[3]*Харбинский научно-технический университет, Харбин, Китай*

THE REPRESENTATION IMAGE UNIPOTENCY OF THE GROUP F_2 BY MAPPING PRIMITIVE ELEMENTS INTO UNIPOTENT MATRICES WITH SMALL JORDAN BLOCKS

O.I. Tavgen[1], Du Junhua[2], Liu Chunyan[3]

[1]*Belarusian State University, Minsk*
[2]*College of Sciences of Qiqihar University, Qiqihar, China*
[3]*Harbin University of Science and Technology, Harbin, China*

Доказано, что образ представления свободной группы $F_2(x, y)$ в $GL(n, C)$ является унипотентной подгруппой, если $(\rho(p)-E)^5=0$ для любого примитивного элемента p и $(\rho(\xi)-E)^2=0$, $(\rho(\eta)-E)^3=0$ для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2.

***Ключевые слова**: унипотентная подгруппа, примитивный элемент, представление группы.*

It is proved that the representation image of the free group $F_2(x, y)$ in $GL(n, C)$ is an unipotent subgroup, when $(\rho(p)-E)^5=0$ for all primitive elements p and $(\rho(\xi)-E)^2=0$, $(\rho(\eta)-E)^3=0$ for some associated primitive elements ξ and η of the group F_2.

***Keywords**: unipotent subgroup, primitive element, representation of group.*

Введение

Пусть $F_2(x, y)$ – свободная группа с образующими x и y. Рассмотрим представление этой группы

$$\rho: F_2(x, y) \to GL(n, C),$$

при этом образующие и все примитивные элементы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В работах [2], [3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n \le 5$. В работах [4]–[5] дан утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p)-E)^k=0$, k=3,4, для любого примитивного элемента p. В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p)-E)^5=0$ для любого примитивного элемента p и соотношения

$$(\rho(\xi)-E)^2=0,$$

$$(\rho(\eta)-E)^3=0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2.

***Теорема**. Образ $F_2(x, y)$ относительно $\rho: F_2(x, y) \to GL(n, C)$ – унипотентная подгруппа в $GL(n, C)$ при условии $(\rho(p)-E)^5=0$ для любого примитивного элемента p и*

$$(\rho(\xi)-E)^2=0,$$

$$(\rho(\eta)-E)^3=0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η.

1 Предварительные результаты

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

***Лемма* 1.1** [1]. *Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2. Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p имеют вид $p^{\alpha} q^{\varepsilon} p^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in Z$, $\varepsilon = \pm 1$.*

В дальнейшем обозначим

$$\rho(\xi) = A = H + E, \quad \rho(\eta) = B = T + E,$$

где ξ и η – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2 и

$$\left(\rho(\xi) - E\right)^2 = 0,$$

$$\left(\rho(\eta) - E\right)^3 = 0,$$

E – единичная матрица, $L(W)$ – длина слова W.

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\left(\rho(p) - E\right)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p, то справедливо равенство $W(H, B) = 0$, если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H.*

Доказательство. Поскольку

$$B^4 = 4B^3 - 6B^2 + 4B - E,$$

то можно считать, что в слове $W(H, B)$ нет элементов B^4. Поскольку $B^m A$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1.1), то имеем

$$\left(B^m A - E\right)^5 = 0.$$

Отсюда $\left(A - E + mTA + \dfrac{m(m-1)}{2} T^2 A\right)^5 = 0.$

Из этого получаем $\left(a_0 + a_1 m + a_2 m^2\right)^5 = 0$, где

$$a_0 = A - E, \quad a_1 = TA - \frac{1}{2} T^2 A,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} T^2 A - \frac{1}{2} T^3 A.$$

Из $\left(a_0 + a_1 m + a_2 m^2\right)^5 = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{10} F_k' m^k = 0,$$

где $F_0' = a_0^5$, $F_1' = a_0^4 a_1 + a_0^2 a_1 a_0^3 + a_0^3 a_1 a_0^2 + a_1 a_0^4, \ldots,$ $F_{10}' = a_2^5$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1{,}11}$, не равными, то $F_i' = 0$, $i = \overline{0{,}10}$.

Поскольку $A^m B$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $\left(A^m B - E\right)^5 = 0$. Отсюда $\left(B - E + mHB\right)^5 = 0$. Из этого получаем $\sum_{k=0}^{5} F_k m^k = 0$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1{,}6}$, не равными, то $F_i = 0$, $i = \overline{0{,}5}$. Из $F_1 = 0$ получаем $T^2 H T^2 = 0$, и

$$\begin{aligned} HF_1 H = HB^2 HB^2 H - 2HB^2 HBH - \\ -2HBHB^2 H + 4HBHBH = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Из $F_2 = 0$ получаем $F_2 \cdot T^2 = 0$, значит,

$$T^2 HTHT^2 = 0. \tag{1.2}$$

Из $F_2' = 0$ получаем

$$H\left(TA - \frac{1}{2} T^2 A\right) H \left(TA - \frac{1}{2} T^2 A\right) H = 0,$$

и следует

$$2HTHTH = HTHT^2 H + HT^2 HTH \tag{1.3}$$

или

$$6HBHBH = HB^2 HBH + HBHB^2 H. \tag{1.4}$$

Из (1.1), (1.4) получаем

$$HB^2 HB^2 H = 8HBHBH. \tag{1.5}$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T^2, получаем $2HTHTHT^2 = HTHT^2 HT^2 + HT^2 HTHT^2$, следовательно,

$$HTHTHT^2 = 0. \tag{1.6}$$

Из равенств $F_2' \cdot T = 0$, (1.2) и $T^2 HT^2 = 0$, получаем

$$THTHT^2 + THT^2 HT + T^2 HTHT = 0. \tag{1.7}$$

Умножив на H слева, (с помощью (1.6)) получаем

$$HTHT^2 HT + HT^2 HTHT = 0. \tag{1.8}$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T, получаем $2HTHTHT = HTHT^2 HT + HT^2 HTHT$.

Из этого и (1.8) имеем $HTHTHT = 0$, т. е.

$$HBHBHB = HBHBH. \tag{1.9}$$

Аналогично имеем

$$BHBHBH = HBHBH. \tag{1.10}$$

Поэтому

$$8HBHBHB = 8BHBHBH = HB^2 HB^2 H. \tag{1.11}$$

Умножив уравнение (1.5) справа на $B^2 HBHB$, получаем

$$HB^2 HBHB^2 HBHB = 0. \tag{1.12}$$

Аналогично имеем

$$HBHB^2 HBHB^2 HB = 0.$$

Если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H, тогда

$$W(H, B) = \cdots HB^{s_1} HB^{s_2} HB^{s_3} HB^{s_4} HB^{s_5} \cdots.$$

Пусть $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$, тогда $W(H, B) = 0$, если $s < 6$ (потому что $(HB)^4 = 0$).

Можно считать $s_i < 3$, $i = \overline{1{,}5}$ (потому что $(B - E)^3 = 0$). Из (1.11) знаем, что в слове $W(H, B)$ нет $\cdots HB^2 HB^2 H \cdots$. Поэтому из (1.10), (1.11), (1.12) получаем $W(H, B) = 0$.

Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы. Берем любое слово $W(H, B)$. В $W(H, B)$ не мене одного элемента H. Тогда $\left(W(H, B)\right)^5 = 0$ (см. лемму 1.2).

Отсюда получаем $trW(H,B)=0.$ Берем любую матрицу $W(A,B)$ в подгруппе $\rho(F_2)$. Тогда $W(A,B)=B^k+\sum a_iW_i(H,B)$ в $W_i(H,B)$ не менее одного H. Поэтому

$$trW(A,B)=trB^k+a_i\sum trW_i(H,B)=n+0=n.$$

Так как это равенство справедливо для любой матрицы C, то $trC=trC^2=...=trC^n=n.$

Отсюда следует, что C – унипотентная матрица. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М. : Наука, 1974.

2. *Самсонов, Ю.Б.* Унипотентность образа представления $F_2(x,y)$ матрицами из $GL(n,C)$, n=2,3,4, при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы / Ю.Б. Самсонов, О.И. Тавгень // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 29–32.

3. *Тавгень, О.И.* Унипотентность образа представления $F_2(x,y)$ в $GL(5,\mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 3. – С. 74–79.

4. *Тавгень, О.И.* Унипотентность образа представления $F_2(x,y)$ в $GL(n,C)$ при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малых размерностей / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Веснік ВДУ. Серыя 1. – 2010. – № 3 (57). – С. 48–53.

5. *Тавгень, О.И.* Унипотентность образа представления F_2 в $GL(n,C)$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малой размерности (II) / О.И. Тавгень, Ян Синьсун, Лю Сщуньянь // Веснік ВДУ. Серыя 1. – 2010. – № 6 (60). – С. 11–14.

Поступила в редакцию 30.05.11.