МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

ON A CROSS SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE PAINLEVE PROPERTY

I.P. Martynov, O.N. Parmanchuk, V.M. Pecevich

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

В статье рассмотрена перекрестная система двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной и третьей степени относительно переменных. Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений данной системы.

Ключевые слова: *перекрестная система дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, особое решение, тест Пенлеве, резонансы.*

The article deals with the cross-system of two differential equations of the second degree and third-degree derivative of the variables. The necessary and sufficient conditions having the Painleve property for solutions of this system are obtained.

Keywords: *cross system of differential equations, property of Painleve, singular solution, test of Painleve, resonances.*

Введение

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + \\ &+ y(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + \\ &+ x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – аналитические функции по t.

Исследованию систем вида (0.1) при определенных ограничениях на коэффициенты системы на предмет наличия свойства Пенлеве посвящены работы [1], [2]. В них выделены системы со свойством Пенлеве рассматриваемого типа. В [3] исследована система (0.1) в случае $a_3 \neq 0,\ \ b_0 = 0,\ \ b_3 = 0,\ \ |c_3| + |d_3| \neq 0,\ \ |b_2| + |b_1| \neq 0,$ $|d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0.$ Найдены необходимые и достаточные условия, при которых данная система при накладываемых ограничениях не имеет подвижных критических особых точек. В настоящей работе получим необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений системы (0.1) в случае, который еще не был исследован в работах [1]–[3].

Для исследования системы (0.1) нам потребуется

Лемма [4]. *Для того, чтобы уравнение*

$$\left(x'' + A(t,x,x')\right)^n = B(t,x,x'),$$

где $n = 2,3,....,$ A, B *– рациональные по* x, x' *и локально аналитические по* t *функции не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы* A *и* B *были полиномами по* x' *степени* 2 *и* $2n$ *соответственно.*

1 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве для системы **(0.1)** *при ограничениях* **(1.1)**

Рассмотрим систему (0.1) в случае

$$\begin{gathered} b_3 = 0,\ a_0 = Kb_0,\ b_0 \neq 0, \\ K = const,\ a_3 \neq 0, \\ |c_3| + |d_3| \neq 0,\ |b_2| + |b_1| + |b_0| \neq 0, \\ |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

и $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – аналитические функции по t. Найдем необходимые и достаточные условия, при которых решения системы (0.1) при ограничениях (1.1) обладают свойством Пенлеве.

Построив уравнения для компонент x и y системы (0.1) с ограничениями (1.1) и требуя выполнения леммы, получим 34 соотношения между коэффициентами системы. Разрешив некоторые из них, выполнив линейные преобразования относительно x и y, замену независимой переменной t и переобозначая коэффициенты системы (однозначно определяемые через коэффициенты системы (0.1)), получим

$$\begin{aligned} x'^2 &= x^3 + a_2x^2 + a_1x + y(x^2 + b_1x + b_0), \\ y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + x\left(c_3y^2 + d_1y + d_0\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $b_0 \neq 0,\ c_3 \neq 0.$

Для компоненты x из (1.2) построим уравнение

$$\begin{gathered}\big(2\left(x^2+b_1x+b_0\right)x'x''-\\ -\left(2x+b_1\right)x'^3-\left(b_1'x+b_0'\right)x'^2-\\ -\big(x^4+2b_1x^3+\left(a_1+a_2b_1+3b_0\right)x^2+\\ +2a_2b_0x+a_1b_0\big)x'-\left(a_2'-b_1'\right)x^4-\\ -\left(a_2b_1'-a_2'b_1+b_0'-a_1'\right)x^3-\left(a_2b_0'-a_2'b_0+\right.\\ \left.+a_1b_1'-a_1'b_1\right)x^2-\left(a_1b_0'-a_1'b_0\right)x\big)^2=\\ =\left(x^2+b_1x+b_0\right)\left(c_3x'^6+A_0x'^4+A_1x'^2+A_2\right),\end{gathered}\tag{1.3}$$

где A_0, A_1, A_2 – полиномы по x третьей, шестой и восьмой степеней соответственно, с аналитическими по t коэффициентами, однозначно определяющимися через коэффициенты системы (1.2). Введем в уравнение (1.3) малый параметр ε по формулам $x=\varepsilon^{-2}X,\, t=t_0+\varepsilon\tau$, при $\varepsilon=0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left(2XX''-2X'^2-X^3\right)^2=c_3\left(X'^2-X^3\right)^2. \tag{1.4}$$

Для однозначности решения уравнения (1.4) необходимо требовать [5] $c_3=\left(\dfrac{2}{N_1}\right)^2$, где $N_1\in Z.$

С учетом этого условия для компоненты y из (1.2) построим уравнение, полагая в котором $y=\varepsilon^{-2}Y,\, t=t_0+\varepsilon\tau$ при $\varepsilon=0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$Y''-\left(1-\lambda\frac{N_1}{4}\right)\frac{Y'^2}{Y}=\frac{1}{N_1}\left(\frac{2}{N_1}+\lambda\right)Y^2,$$

где $\lambda^2=1$. Для однозначности решения последнего уравнения необходимо требовать [5] $\dfrac{N_1}{4}=\dfrac{1}{N_2},\ N_2\in Z.$ Учитывая это условие и то, что N_1 и N_2 целые, получим, что $c_3\in\left\{\dfrac{1}{4},1,4\right\}.$

Таким образом, система (1.2) примет вид

$$\begin{gathered}x'^2=x^3+a_2x^2+a_1x+y(x^2+b_1x+b_0),\\ y'^2=c_3y^3+c_2y^2+c_1y+x\left(c_3y^2+d_1y+d_0\right),\end{gathered}\tag{1.5}$$

где $b_0\neq 0$, $c_3\in\left\{\dfrac{1}{4},1,4\right\}.$

Построив уравнения для компонент x и y системы (1.5) и требуя выполнения леммы, выполнив линейные преобразования относительно x и y, замену независимой переменной t и переобозначая коэффициенты системы (однозначно определяемые через коэффициенты системы (1.2)), получим

$$\begin{gathered}x'^2=\left(x+y\right)(x^2+b_1x+b_0),\\ y'^2=c_3\left(x+y\right)\left(y^2+d_1y+d_0\right),\end{gathered}\tag{1.6}$$

где $b_0\neq 0,\ c_3\in\left\{\dfrac{1}{4},1,4\right\}.$

Для компоненты x из (1.6) построим уравнение

$$\begin{gathered}\Big(2\left(x^2+b_1x+b_0\right)x''-\left(2x+b_1\right)x'^2-\\ -\left(b_1'x+b_0'\right)x'-\left(x^2+b_1x+b_0\right)^2\Big)^2=\\ =\left(x^2+b_1x+b_0\right)c_3\Big(x'^4+\\ +\left(x^2+b_1x+b_0\right)\left(-2x+d_1\right)x'^2+\\ +\left(x^2+b_1x+b_0\right)^2\left(x^2-d_1x+d_0\right)\Big).\end{gathered}\tag{1.7}$$

Требуя, чтобы общее решение уравнения

$$\begin{gathered}x'^4+\left(x^2+b_1x+b_0\right)\left(-2x+d_1\right)x'^2+\\ +\left(x^2+b_1x+b_0\right)^2\left(x^2-d_1x+d_0\right)=0\end{gathered}$$

было особым решением (1.7) [6], получим, что необходимо чтобы d_0, d_1 были постоянными.

С учетом этого для компоненты y из (1.6) построим уравнение

$$\begin{gathered}c_3\Big(2\left(y^2+d_1y+d_0\right)y''-\left(2y+d_1\right)y'^2-\\ -c_3\left(y^2+d_1y+d_0\right)^2\Big)^2=\left(y^2+d_1y+d_0\right)\Big(y'^4-\\ -c_3\left(2y-b_1\right)\left(y^2+d_1y+d_0\right)y'^2+\\ +c_3{}^2\left(y^2-b_1y+b_0\right)\left(y^2+d_1y+d_0\right)^2\Big).\end{gathered}\tag{1.8}$$

Требуя, чтобы общее решение уравнения

$$\begin{gathered}y'^4-c_3\left(2y-b_1\right)\left(y^2+d_1y+d_0\right)y'^2+\\ +c_3{}^2\left(y^2-b_1y+b_0\right)\left(y^2+d_1y+d_0\right)^2=0\end{gathered}$$

было особым решением (1.8) [6], получим, что необходимо, чтобы b_0, b_1 были постоянными. Тогда уравнение (1.7) примет вид

$$\begin{gathered}\Big(2\left(x^2+b_1x+b_0\right)x''-\left(2x+b_1\right)x'^2\\ -\left(x^2+b_1x+b_0\right)^2\Big)^2=\left(x^2+b_1x+b_0\right)\times\\ \times c_3\Big(x'^4+\left(x^2+b_1x+b_0\right)\left(-2x+d_1\right)x'^2+\\ +\left(x^2+b_1x+b_0\right)^2\left(x^2-d_1x+d_0\right)\Big).\end{gathered}\tag{1.9}$$

Введем в уравнение (1.9) малый параметр ε по формулам $x=\varepsilon^{-2}X$, $t=\varepsilon\tau$ и при $\varepsilon=0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\left(2XX''-\left(2-\sqrt{c_3}\right)X'^2-\left(1+\sqrt{c_3}\right)X^3\right)\times\\ \times\left(2XX''-\left(2+\sqrt{c_3}\right)X'^2-\left(1-\sqrt{c_3}\right)X^3\right)=0,\end{gathered}$$

которое распадается на два уравнения

$$\begin{gathered}2XX''-\left(2-\sqrt{c_3}\right)X'^2-\left(1+\sqrt{c_3}\right)X^3=0,\\ 2XX''-\left(2+\sqrt{c_3}\right)X'^2-\left(1-\sqrt{c_3}\right)X^3=0.\end{gathered}\tag{1.10}$$

Рассмотрим случай, когда $c_3=1$. Согласно методу резонансов, решение первого уравнения в (1.10) можно представить формальным рядом

$$X=\frac{4}{\tau^2}+\frac{L_{-1}}{\tau}+L_0+L_1\tau+L_2\tau^2+...,$$

где L_2 – произвольное. Тогда согласно [7], если уравнение (1.9) имеет решение, представимое рядом вида

$$x=\frac{4}{t^2}+\frac{l_{-1}}{t}+l_0+l_1t+l_2t^2+...,$$

то l_2 должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$d_0=\frac{1}{4}d_1^2. \qquad (1.11)$$

Аналогично в случаях $c_3=\frac{1}{4}$ и $c_3=4$ несложно убедится, что для произвольности резонансных коэффициентов в решениях уравнения (1.9) необходимо требовать выполнения условия (1.11). Таким образом, систему (1.6) можно записать в виде

$$x'^2=(x+y)(x^2+b_1x+b_0),$$
$$y'^2=c_3(x+y)(y+H)^2, \qquad (1.12)$$

где $c_3\in\left\{\frac{1}{4},1,4\right\}$, H, b_0, b_1 – постоянные.

Для компоненты y из (1.12) построим уравнение

$$c_3\left(2(y+H)y''-2y'^2-c_3(y+H)^3\right)^2=$$
$$=\left(y'^4-c_3(2y-b_1)(y+H)^2y'^2+\right. \qquad (1.13)$$
$$\left.+c_3^2(y+H)^4(y^2-b_1y+b_0)\right).$$

Введем малый параметр ε по формулам $y=\varepsilon^{-2}Y$, $t=\varepsilon\tau$, и при $\varepsilon=0$ получим дифференциальное уравнение

$$\left(2YY''+\left(-2+\frac{1}{\sqrt{c_3}}\right)Y'^2-\left(c_3+\sqrt{c_3}\right)Y^3\right)\times$$
$$\times\left(2YY''+\left(-2-\frac{1}{\sqrt{c_3}}\right)Y'^2-\left(c_3-\sqrt{c_3}\right)Y^3\right)=0,$$

которое распадается на два дифференциальных уравнения

$$2YY''+\left(-2+\frac{1}{\sqrt{c_3}}\right)Y'^2-\left(c_3+\sqrt{c_3}\right)Y^3=0,$$
$$\qquad (1.14)$$
$$2YY''+\left(-2-\frac{1}{\sqrt{c_3}}\right)Y'^2-\left(c_3-\sqrt{c_3}\right)Y^3=0.$$

Пусть c_3=1. Согласно методу резонансов решение первого уравнения в (1.14) можно представить формальным рядом

$$Y=\frac{4}{\tau^2}+\frac{P_{-1}}{\tau}+P_0+P_1\tau+P_2\tau^2+...,$$

где P_2 – произвольное. Тогда согласно [7], если уравнение (1.13) имеет решение, представимое рядом вида $y=\frac{4}{t^2}+\frac{p_{-1}}{t}+p_0+p_1t+p_2t^2+...,$ то p_2 должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$b_0=\frac{1}{4}b_1^2. \qquad (1.15)$$

Аналогично в случаях $c_3=\frac{1}{4}$ и $c_3=4$ несложно убедиться, что для произвольности резонансных коэффициентов в решениях уравнения (1.13) необходимо требовать выполнения резонансного условия (1.15). Таким образом, систему (1.12) можно записать в виде

$$x'^2=(x+y)(x+M)^2,$$
$$y'^2=c_3(x+y)(y+H)^2, \qquad (1.16)$$

где $c_3\in\left\{\frac{1}{4},1,4\right\}$, H, M – постоянные.

Из (1.16) можно записать

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{(x+M)^2}{c_3(y+H)^2},$$

откуда

$$(x+M)^{\sqrt{c_3}}=C_1(y+H)$$

$$\text{или}\quad (x+M)^{\sqrt{c_3}}=\frac{C_2}{y+H}, \qquad (1.17)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Тогда из (1.17) при $c_3=\frac{1}{4}$ соответственно получим

$$x=C_1^2(y+H)^2-M \quad\text{или}\quad x=\frac{C_2^2}{(y+H)^2}-M,$$

подставляя в (1.16), имеем

$$y'^2=\frac{1}{4}\left(C_1^2(y+H)^4+(y-M)(y+H)^2\right),$$
$$\qquad (1.18)$$
$$y'^2=\frac{1}{4}\left(C_2^2+(y-M)(y+H)^2\right).$$

При $c_3=1$ из (1.17) имеем $x=C_1(y+H)-M$ или $x=\frac{C_2}{y+H}-M$, тогда соответственно из (1.16)

$$y'^2=\left(C_1(y+H)+y-M\right)(y+H)^2,$$
$$\qquad (1.19)$$
$$y'^2=C_2(y+H)+(y-M)(y+H)^2.$$

При $c_3=4$ из (1.17) запишем

$$y=\frac{1}{C_1}(x+M)^2-H \quad\text{или}\quad y=\frac{C_2}{(x+M)^2}-H,$$

а из (1.16)

$$x'^2=\left(x-H+\frac{1}{C_1}(x+M)^2\right)(x+M)^2,$$
$$\qquad (1.20)$$
$$x'^2=C_2+(x-H)(x+M)^2.$$

Уравнения в (1.18)–(1.20) являются уравнениями Брио и Буке [8]. Последнее означает, что решения уравнений (1.18)–(1.20) обладают свойством Пенлеве, причем интегрируются в эллиптических функциях. Из структуры системы (1.16) и записанных выше соотношений следует, что и вторая компонента системы в соответствующих случаях интегрируется в эллиптических функциях. Таким образом, справедлива

Теорема. *Для того, чтобы система* (0.1) *с ограничениями* (1.1) *обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием* x *и* y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к виду* (1.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парманчук, О.Н.* Об одной перекрестной системе двух дифференциальных уравнений первого порядка и второй степени со свойством Пенлеве / О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология . – 2008. – № 3. – С. 72–79.

2. *Мартынов, И.П.* Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со свойством Пенлеве / И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.М. Пецевич // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2010. – № 2. – С. 9–17.

3. *Парманчук, О.Н.* Аналитические свойства решений одной перекрестной системы двух дифференциальных уравнений / О.Н. Парманчук // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2011. – № 2. – С. 35–41.

4. *Березкина, Н.С.* О системе двух дробно-линейных дифференциальных уравнений степени *n* со свойством Пенлеве / Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. − 2006. − Т. 42, № 4. − С. 1−6.

5. *Айнс, Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков, 1939. – 718 с.

6. *Cosgrove, C.* Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. − 1993. − Vol. 88. − P. 25−87.

7. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* / Т.Н. Ванькова [и др.] // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология . – 2008. – № 1. – С. 8–16.

8. *Голубев, В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. − М.–Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

Поступила в редакцию 06.06.11.