Проблемы физики, математики и техники, № 3 (8), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983.24

ТЕОРЕМА НЕХАРИ НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЙ ГРУППОЙ ХАРАКТЕРОВ

Р.В. Дыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE NEHARI THEOREM FOR COMPACT ABELIAN GROUPS WITH LINEARLY ORDED DUALS

R.V. Dyba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Теорема Нехари для классических ганкелевых операторов обобщается на случай компактных абелевых групп с линейно упорядоченной группой характеров.

Ключевые слова: *компактная абелева группа, линейно упорядоченная группа, оператор Ганкеля, пространство Харди.*

The Nehari theorem for classical Hankel operators is generalized to compact abelian groups with linearly ordered duals.

Keywords: *compact abelian group, linearly ordered group, Hankel operator, Hardy space.*

Введение

Операторы Ганкеля представляют собой один из важнейших классов операторов в пространствах голоморфных функций, имеющий интересные приложения к проблеме моментов, ортогональным полиномам, теории рациональной аппроксимации и другим важным разделам анализа, а также теории прогнозирования и теории управления (см., например, [1], [2]). Одно из равносильных определений ганкелева оператора состоит в том, что в некотором ортонормированном базисе он имеет (вообще говоря, бесконечную) ганкелеву матрицу, т. е. матрицу, элементы которой зависят лишь от суммы индексов. После открытия символа ганкелева оператора теория таких операторов в значительной степени свелась к изучению зависимости свойств оператора от геометрических и аналитических характеристик его символа. Таким образом, в этой теории (так же, как и в теории тёплицевых операторов [1]–[3]) тесно взаимодействуют методы теории функций и функционального анализа. Классическая теорема Нехари [4] дает критерий ограниченности ганкелева оператора в терминах его матрицы. В дальнейшем эта важная теорема подвергалась различным обобщениям и модификациям. В настоящей заметке будет доказано обобщение теоремы Нехари на случай компактных абелевых групп с линейно упорядоченной группой характеров.

1 Вспомогательные сведения и результаты

Пусть G – компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара dx. Обозначим через X группу характеров группы G (т. е. группу непрерывных гомоморфизмов из G в одномерный тор $\mathbf{T}$). Будем предполагать, что X является линейно упорядоченной группой, т. е. в ней введено отношение линейного порядка, согласованное с групповой операцией. Обозначим через X_+ положительный конус группы X, а через X_- – отрицательный. Другими словами,

$$X_+ = \{\chi \in X \mid \chi \geq \mathbf{1}\},$$

$$X_- = \{\chi \in X \mid \chi \leq \mathbf{1}\}.$$

Множества X_+ и X_- являются подполугруппами группы X, причем

$$X = X_+ \cup X_-,\ X_+ \cap X_- = \{\mathbf{1}\},$$

где $\mathbf{1}$ обозначает единичный характер группы G.

«Крышкой» будем обозначать преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Таким образом,

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx,\ \chi \in X.$$

***Определение* 1.1**. *Пространство Харди* $H^2(G)$ *над* G определяется следующим образом:

$$H^2(G) = \left\{f \in L^2(G) \mid \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_- \setminus \{\mathbf{1}\}\right\}.$$

Обозначим через $H_-^2(G)$ ортогональное дополнение пространства Харди в $L^2(G)$. Тогда

$$H_-^2(G) = \left\{f \in L^2(G) \mid \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_+\right\}.$$

При этом X_+ является ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$, а $X_- \setminus \{\mathbf{1}\}$ – ортонормированным базисом пространства $H_-^2(G)$ (легко проверить, что эти системы ортонормированы и максимальны в соответствующих пространствах).

***Определение* 1.2**. Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. *Оператором Ганкеля* (*ганкелевым оператором*) назовем оператор $H_\varphi : H^2(G) \to H_-^2(G)$, определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где $P_- : L^2(G) \to H_-^2(G)$ – оператор ортогонального проектирования, а

$$M_\varphi : L^2(G) \to L^2(G),\ f \mapsto \varphi f$$

– оператор умножения на φ. Функцию φ будем называть *символом* оператора H_φ.

Классические ганкелевы операторы соответствуют случаю G=**T**, X=**Z**. С точки зрения обобщений интерес представляет уже случай двумерного тора $G=\mathbf{T}^2$, где группа характеров $X=\mathbf{Z}^2$ наделена лексикографическим порядком.

***Определение* 1.3**. Рассмотрим пространство

$$H^\infty(G) := \left\{ f \in L^\infty(G) \mid fH^2(G) \subset H^2(G) \right\}.$$

Известно (см. [3]), что $H^\infty(G)$ есть банахова алгебра, содержащая аналитические полиномы (т. е. линейные комбинации элементов из X_+).

Для доказательства основного результата понадобится ряд вспомогательных утверждений.

***Лемма* 1.1**. *Пусть* $\varphi \in L^\infty(G)$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *оператор Ганкеля с символом* φ *ограничен;*

2) $H_\varphi = H_{\varphi+\psi} \Leftrightarrow \psi \in H^\infty(G)$;

3) $\left\| H_\varphi \right\| \le dist_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G))$.

Доказательство. 1) Оператор M_φ ограничен в $L^2(G)$, так как для любой функции $f \in L^2(G)$

$$\left\| M_\varphi f \right\|_2 = \left\| \varphi f \right\|_2 = \left(\int_G |\varphi(t)|^2 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\| \varphi \right\|_\infty \left(\int_\Pi |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \varphi \right\|_\infty \left\| f \right\|_2 .$$

Поэтому оператор $H_\varphi = P_- M_\varphi$ также ограничен.

2) Для любых $f \in H^2(G)$ и $\varphi, \psi \in L^\infty$ имеем

$$H_\varphi f = P_-(\varphi f),$$

а также

$$H_{\varphi+\psi} f = P_-\left((\varphi+\psi) f \right) = P_-(\varphi f) + P_-(\psi f).$$

Очевидно, что

$$H_\varphi = H_{\varphi+\psi} \Leftrightarrow (\forall f \in H^2(G))\ P_-(\psi f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall f \in H^2(G)) \psi f \in H^2(G) \Leftrightarrow \psi \in H^\infty(G).$$

3) Для любых $\psi \in H^\infty(G)$ и $f \in H^2(G)$ имеем

$$\left\| H_\varphi f \right\|_2 = \left\| H_{\varphi+\psi} f \right\|_2 = \left\| P_-\left((\varphi+\psi) f \right) \right\|_2 \le$$

$$\le \left\| (\varphi+\psi) f \right\|_2 \le \left\| \varphi+\psi \right\|_\infty \left\| f \right\|_2 .$$

Тогда по определению нормы оператора $\left\| H_\varphi \right\| \le \left\| \varphi+\psi \right\|_\infty$ для любого $\psi \in H^\infty(G)$, откуда следует, что

$$\left\| H_\varphi \right\| \le \inf_{\psi \in H^\infty(G)} \left\| \varphi+\psi \right\|_\infty = dist_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 1.2**. *Оператор Ганкеля* H_φ *удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:*

$$H_\varphi S_\chi = P_- S_\chi H_\varphi \quad \forall \chi \in X_+, \qquad (1.1)$$

где $S_\chi = M_\chi \mid H^2(G)$.

Доказательство. Для любых $\varphi \in L^\infty$, $\chi \in X_+$, $f \in H^2(G)$ имеем

$$H_\varphi S_\chi f = P_- M_\varphi (\chi f) = P_-(\varphi \chi f) = \varphi \chi f - P_+(\varphi \chi f),$$

где $P_+ = I - P_-$. Ясно, что P_+ есть ортопроектор на подпространство $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$. С другой стороны,

$$P_- S_\chi H_\varphi f = P_-\left(\chi P_-(\varphi f) \right) = P_-\left[\chi \varphi f - \chi P_+(\varphi f) \right] =$$

$$= \left[\chi \varphi f - \chi P_+(\varphi f) \right] - P_+\left[\chi \varphi f - \chi P_+(\varphi f) \right] =$$

$$= \chi \varphi f - P_+(\chi \varphi f) - \chi P_+(\varphi f) + P_+ \chi P_+(\varphi f).$$

Осталось заметить, что $\chi P_+(\varphi f) \in H^2(G)$, а значит, $P_+ \chi P_+(\varphi f) = \chi P_+(\varphi f)$, лемма доказана.

Равенство (1.1) будем далее называть *уравнением Ганкеля*.

***Определение* 1.4**. *Ганкелевой формой* называют комплексную билинейную форму вида

$$A(a,b) = \sum\nolimits_{\mu,\nu \in X_+} k(\mu\nu) a(\mu) b(\nu), \qquad (1.2)$$

где a, b, k – функции на X_+. При этом функция k называется *ядром формы A*.

Если $\left| A(a,b) \right| \le M < \infty \ \forall a, b$ таких, что

$$\sum\nolimits_{\mu \in X_+} \left| a(\mu) \right|^2 = \sum\nolimits_{\nu \in X_+} \left| b(\nu) \right|^2 = 1,$$

то форма A называется *ограниченной*, а число M – *константой ограниченности* этой формы. *Нормой формы A* называют наименьшую из ее констант ограниченности.

Далее важную роль будет играть следующий результат.

***Теорема* 1.1** [5]. *Ганкелева форма* (1.2) *на* X_+ *ограничена тогда и только тогда, когда ее ядро имеет вид*

$$k(\chi) = \int_G \varphi(x) \chi(x) dx,\ \chi \in X_+,$$

где $\varphi \in L^\infty(G)$. *При этом* $\left\| \varphi \right\|_\infty \le M$, *где M – константа ограниченности формы A.*

В частности, из этой теоремы следует, что норма формы A равняется $\left\| \varphi \right\|_\infty$ для функции φ, удовлетворяющей указанным выше условиям.

***Определение* 1.5**. Пусть L_1, L_2 – гильбертовы пространства, и пусть $H: L_1 \to L_2$ – ограниченный линейный оператор. *Обобщенными матричными элементами оператора H* называются скалярные произведения

$$\langle Hx, y\rangle, \, x \in B_1, \, y \in B_2,$$

где B_1, B_2 – ортонормированные базисы в L_1, L_2 соответственно.

Следующая простая лемма показывает, что оператор однозначно определяется своими матричными элементами.

***Лемма* 1.3**. *Пусть K и K_- – гильбертовы пространства, $H_1, H_2 : K \to K_-$ – ограниченные линейные операторы, X_+ – ортонормированный базис в K, X_- – ортонормированный базис в K_-. Если*

$$\langle H_1\chi, \eta\rangle = \langle H_2\chi, \eta\rangle \quad \forall \chi \in X_+, \forall \eta \in X_-,$$

то $H_1 = H_2$.

Доказательство. Любой элемент $f \in K$ разлагается в ряд Фурье $f = \sum_{\chi\in X_+} f_\chi \chi$, причем

$$H_1 f = \sum_{\chi\in X_+} f_\chi H_1\chi,$$
$$H_2 f = \sum_{\chi\in X_+} f_\chi H_2\chi.$$

Тогда

$$\langle H_1 f, \eta\rangle = \left\langle \sum_{\chi\in X_+} f_\chi H_1\chi, \eta \right\rangle =$$
$$= \sum_{\chi\in X_+} f_\chi \langle H_1\chi, \eta\rangle = \sum_{\chi\in X_+} f_\chi \langle H_2\chi, \eta\rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{\chi\in X_+} f_\chi H_1\chi, \eta \right\rangle = \langle H_2 f, \eta\rangle.$$

Следовательно, $H_1 f = H_2 f$ для любого $f \in K$. Лемма доказана.

2 Основная теорема

Основным результатом данной заметки является следующее обобщение теоремы Нехари.

***Теорема* 2.1.** *Ограниченный оператор $H: H^2(G) \to H^2_-(G)$ является оператором Ганкеля, т. е. $H = H_\varphi, \varphi \in L^\infty(G)$, тогда и тогда, когда H удовлетворяет уравнению Ганкеля. При этом $\|H\| = \|\varphi\|_\infty = dist_{L^\infty}\left(\varphi, H^\infty(G)\right)$.*

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 1.2. Докажем достаточность. Пусть H – ограниченный оператор, удовлетворяющий уравнению Ганкеля. Рассмотрим билинейную форму

$$A(f,g) := \langle Hf, \overline{g}\rangle \ \ (f, g \in H^2(G)).$$

Пусть $f = \sum_{\chi\in X_+} a_\chi \chi$, $\overline{g} = \sum_{\xi\in X_+} \overline{b}_\xi \overline{\xi}$ – разложения в ряды Фурье. Тогда

$$Hf = \sum_{\chi\in X_+} a_\chi H\chi,$$
$$H\overline{g} = \sum_{\xi\in X_+} \overline{b}_\xi H\overline{\xi},$$

а потому

$$\langle Hf, \overline{g}\rangle = \left\langle \sum_{\chi\in X_+} a_\chi H\chi, \sum_{\xi\in X_+} \overline{b}_\xi \overline{\xi} \right\rangle =$$
$$= \sum_{\chi,\xi\in X_+} \langle H\chi, \overline{\xi}\rangle a_\chi b_\xi.$$

Так как оператор H удовлетворяет уравнению Ганкеля, то

$$\langle H\chi, \overline{\xi}\rangle = \langle HS_\chi \mathbf{1}, \overline{\xi}\rangle = \langle P_-\left(S_\chi H\mathbf{1}\right), \overline{\xi}\rangle =$$
$$= \langle S_\chi H\mathbf{1}, P_-\left(\overline{\xi}\right)\rangle = \langle S_\chi H\mathbf{1}, \overline{\xi}\rangle =$$
$$= \langle \chi H\mathbf{1}, \overline{\xi}\rangle = \langle H\mathbf{1}, \overline{\chi\xi}\rangle = k\left(\chi\xi\right),$$

где $k(\chi) := \langle H\mathbf{1}, \overline{\chi}\rangle$. Таким образом, $A(f,g)$ – ганкелева форма с ядром k. Докажем, что она ограничена. Действительно, для любых $f, g \in H^2(G)$ имеем

$$|A(f,g)| = |\langle Hf, \overline{g}\rangle| \le \|Hf\|_2 \cdot \|g\|_2 \le \|H\| \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

Поэтому при $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$

$$|A(f,g)| \le \|H\|.$$

Следовательно, форма A ограничена с константой ограниченности $\|H\|$. По теореме 1.1 существует функция $\varphi \in L^\infty(G)$ такая, что $\|\varphi\|_\infty \le \|H\|$ и

$$k(\chi) = \int_G \varphi(x)\chi(x)dx, \chi \in X_+$$

(т. е. k – обратное преобразование Фурье функции φ). Тогда

$$\langle H\chi, \overline{\xi}\rangle = k\left(\chi\xi\right) = \int_G \varphi(x)\overline{\overline{\chi(x)\xi(x)}}dx = \hat{\varphi}\left(\overline{\chi\xi}\right).$$

С другой стороны,

$$\langle H_\varphi\chi, \overline{\xi}\rangle = \langle P_-(\varphi\chi), \overline{\xi}\rangle = \langle \varphi\chi, P_-\left(\overline{\xi}\right)\rangle = \langle \varphi\chi, \overline{\xi}\rangle =$$
$$= \int_G \varphi(x)\chi(x)\xi(x)dx = \hat{\varphi}\left(\overline{\chi\xi}\right).$$

Теперь из леммы 1.3 следует, что $H = H_\varphi$.

Наконец, в силу леммы 1.1

$$\|H_\varphi\| \le dist_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)) = \inf_{\psi\in H^\infty} \|\varphi + \psi\|_\infty .$$

Тогда

$$\|\varphi\|_\infty \le \|H\| = \|H_\varphi\| \le dist_{L^\infty}(\varphi, H^\infty(G)) =$$
$$= \inf_{\psi\in H^\infty(G)} \|\varphi + \psi\| \le \|\varphi\|_\infty .$$

Таким образом, $\|H\| = \|\varphi\|_\infty = dist_{L^\infty}(\varphi, H^\infty)$, что и завершает доказательство теоремы.

Идущее ниже следствие теоремы 2.1 дает равносильное определение ганкелева оператора.

Следствие. *Ограниченный оператор $H: H^2(G) \to H^2_-(G)$ будет ганкелевым, если и только если его обобщенные матричные элементы $\langle H\chi, \overline{\xi}\rangle$ зависят лишь от*

$$\chi\xi\left(\chi \in X_+, \xi \in X_+ \setminus \{\mathbf{1}\}\right).$$

Доказательство. Пусть обобщенные матричные элементы оператора H удовлетворяют условиям следствия, т. е. $\langle H\chi, \bar{\xi}\rangle = a(\chi\xi)$, где a – некоторая функция на X_+, $\chi \in X_+, \xi \in X_+ \setminus \{\mathbf{1}\}$. Покажем, что H удовлетворяет уравнению Ганкеля, т. е.

$$HS_\chi f = P_- S_\chi Hf \text{ для любых } f \in H^2(G), \chi \in X_+.$$

Так как любая функция $f \in H^2(G)$ разлагается в ряд Фурье $f = \sum_{\chi \in X_+} f_\chi \chi$, то последнее равенство достаточно доказать для случая, когда f есть элемент базиса. В этом случае имеем $\forall \chi, \xi, \eta \in X_+$

$$\langle H\chi\xi, \bar{\eta}\rangle = a(\chi\xi\eta) \quad (\bar{\eta} \in X_- \cup \{\mathbf{1}\}).$$

А с другой стороны,

$$\langle P_-(\chi H\xi), \bar{\eta}\rangle = \langle \chi H\xi, P_-(\bar{\eta})\rangle =$$

$$= \langle \chi H\xi, \bar{\eta}\rangle = \langle H\xi, \overline{\chi\eta}\rangle = a(\xi\chi\eta).$$

Значит, оператор H ганкелев по теореме 2.1.

Обратно, если H ганкелев, то он удовлетворяет уравнению Ганкеля и, следовательно, для любых $\chi, \xi \in X_+$ имеем для обобщенных матричных элементов оператора H

$$\langle H\chi, \bar{\xi}\rangle = \langle HS_\chi \mathbf{1}, \bar{\xi}\rangle = \langle P_-(S_\chi H\mathbf{1}), \bar{\xi}\rangle =$$

$$= \langle S_\chi H\mathbf{1}, P_-(\bar{\xi})\rangle = \langle S_\chi H\mathbf{1}, \bar{\xi}\rangle =$$

$$= \langle \chi H\mathbf{1}, \bar{\xi}\rangle = \langle H\mathbf{1}, \overline{\chi\xi}\rangle,$$

что и завершает доказательство следствия.

Автор выражает благодарность профессору А.Р. Миротину за руководство данной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пеллер, В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. // Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2005. – 1028 с.

2. *Nikolski, N.K.* Operators, Functions and Systems: An Easy Reading / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. I. – 461 c.

3. *Миротин, А.Р.* Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами / А.Р. Миротин // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 5. – С. 101–116.

4. *Nehari, Z.* On bounded bilinear forms / Z. Nehari // Ann. of Math. – 1957. – Vol. 65, № 2. – P. 153–162.

5. *Wong, J.* Note on Theorem of Nehari on Hankel forms / J. Wong // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – Vol. 24, № 1. – P. 103–105.

Поступила в редакцию 25.04.11.