Проблемы физики, математики и техники, № 3 (8), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБОБЩЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ МАРТИНГАЛУ

Н.В. Бедюк

Белорусский государственный университет, Минск

GENERALIZED STOCHASTIC INTEGRAL WITH RESPECT TO CONTINUOUS MARTINGALE

N.V. Bedziuk

Belarusian State University, Minsk

В алгебре обобщенных случайных процессов рассматривается процесс, задаваемый стохастическим интегралом по непрерывному мартингалу. Найдены условия, при которых рассматриваемый обобщенный процесс ассоциирует обычный случайный процесс. Описан общий вид указанного случайного процесса.

Ключевые слова: *алгебра обобщенных случайных процессов, мартингал, стохастический интеграл.*

Stochastic integral with respect to continuous martingale is considered in the algebra of generalized stochastic processes. The sufficient conditions when the above generalized stochastic process associates an ordinary stochastic process are formulated. The explicit form of the ordinary stochastic process is described.

Keywords: *algebra of generalized stochastic processes, martingale, stochastic integral.*

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях экономики, биологии, физики и техники. В зависимости от предметной области, используются различные определения стохастического интеграла [1]–[4], что существенно влияет на методику исследования. Перспективным направлением в изучении стохастических дифференциальных уравнений, на наш взгляд, является подход с точки зрения алгебры обобщенных случайных процессов [5], который позволяет охватить различные определения стохастического интеграла и, таким образом, проводить исследование стохастических дифференциальных уравнений с единых позиций.

С практической точки зрения важно знать при каких условиях элемент алгебры обобщенных случайных процессов соответствует обычному случайному процессу. Такие условия позволяют переходить от единой теории обобщенных случайных процессов к частным случаям, предлагая более детальное описание динамики моделируемой системы.

Мы работаем в алгебре обобщенных случайных процессов, построенной в [5]. Элементами данной алгебры являются классы эквивалентности на множестве последовательностей случайных процессов. В работе [5] также вводится обобщенный дифференциал $\mathrm{d}_{\tilde h}$ для обобщенного процесса. Указанные конструкции позволяют ввести в алгебре обобщенных случайных процессов обобщенный стохастический интеграл

$$\tilde I_t = \int_0^t f(\tilde V_s)\mathrm{d}_{\tilde h}\tilde V_s \qquad (0.1)$$

и стохастические уравнения в дифференциалах

$$\mathrm{d}_{\tilde h}\tilde x_t = f(\tilde x_t)\mathrm{d}_{\tilde h}\tilde V_t. \qquad (0.2)$$

И стохастический интеграл, и стохастические уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов рассматривались ранее для довольно широкого класса обобщенных случайных процессов. В работах [6], [7] интеграл и уравнения исследовались для обобщенного случайного процесса $\tilde V$, который соответствует или ассоциирует, броуновское движение B_t. В работе [8] вместо броуновского движения B_t был рассмотрен процесс Леви L_t. В обоих случаях связь обобщенного дифференциала $\mathrm{d}_{\tilde h}$ с обобщенным процессом $\tilde V$ задает вид обычного случайного процесса, который соответствует обобщенному стохастическому интегралу $\tilde I_t$ из (0.1) или решению $\tilde x_t$ обобщенного стохастического уравнения в дифференциалах (0.2).

Задача данной работы исследовать стохастический интеграл (0.1), в случае, когда $\tilde V$ ассоциирует непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал M_t. Ключевым отличием данного исследования от указанных выше является то, что квадратичная вариация $\langle M\rangle_t$ процесса M_t также является случайным процессом, тогда как для броуновского движения B_t и процесса Леви L_t она детерминирована. Используя обобщенный стохастический интеграл (0.1), мы описываем различные типы интегралов по непрерывным квадратично-интегрируемым мартингалам и соответствующие им случайные процессы, вид которых задается связью между обобщенным дифференциалом $\mathrm{d}_{\tilde h}$ и обобщенным процессом $\widetilde{V}$.

1 Обобщенный стохастический интеграл

Приведем построение алгебры обобщенных случайных процессов и обобщенных стохастических дифференциалов из [5].

Пусть дано вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, P)$. Фильтрация $\mathbb{F}$ задается потоком сигма-алгебр $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Рассмотрим множество последовательностей случайных процессов на $(\mathbf{\Omega}, \mathbb{F}, P)$ с гладкими траекториями, то есть $(V_t^n)_{n=1}^{\infty}$, где $V_t^n \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ для почти всех $\omega \in \mathbf{\Omega}$. Отношение эквивалентности на множестве таких последовательностей зададим следующим образом: $(V_t^n)_{n=1}^{\infty} \sim (W_t^n)_{n=1}^{\infty}$ если существует N, такое что для любого $n > N$ и для любого t верно $P(V_t^n \neq W_t^n) = 0$. Множество описанных классов эквивалентности образует алгебру обобщенных случайных процессов. Элементы данной алгебры будем обозначать $\widetilde{V} = \left[(V_t^n)_{n=1}^{\infty}\right]$.

Обобщенный дифференциал $\mathrm{d}_{\tilde h}$ для обобщенного процесса $\widetilde{V}$ вводится следующим образом

$$\mathrm{d}_{\tilde h}\widetilde{V}_t = \left[(V_{t+h_n}^n - V_t^n)_{n=1}^{\infty}\right],$$

где $\tilde h$ положительное бесконечно малое обобщенное число, а именно

$$\tilde h \in H = \left\{\left[(h_n)_{n=1}^{\infty}\right] : h_n \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to\infty} h_n = 0\right\}.$$

Введем теперь обобщенный стохастический интеграл вида (0.1). Так как нас интересует значение $\tilde I_t$ для $t \in \mathbb{R}$, мы вводим обобщенный интеграл следующим образом

$$\int_0^t f(\widetilde{V}_s)\mathrm{d}_{\tilde h}\widetilde{V}_s = \tilde I_t = \left[(I_t^n)_{n=1}^{\infty}\right]. \qquad (1.1)$$

Для $\tilde h = [(h_n)_{n=1}^{\infty}]$ введем

$$s_0^n = \{t/h_n\}h_n, \quad s_k^n = s_0^n + kh_n \text{ и } m_t^n = [t/h_n],$$

где $\{y\}, [y]$ обозначают дробную и целую часть числа y, соответственно, тогда

$$I_t^n = \sum_{k=0}^{m_t^n - 1} f(V_{s_k^n}^n)(V_{s_{k+1}^n}^n - V_{s_k^n}^n).$$

***Определение* 1.1.** *Будем говорить что обобщенный случайный процесс $\tilde I_t$ ассоциирует случайный процесс I_t в некотором топологическом пространстве, если $\lim_{n\to\infty} I_t^n = I_t$ в этом пространстве.*

Исследуем вид процесса I_t, ассоциируемого обобщенным случайным процессом (1.1). Тем самым мы опишем различные типы стохастических интегралов, которые соответствуют обобщенному стохастическому интегралу (1.1).

2 Основные результаты

Обобщенный процесс $\widetilde{M}$ ассоциирует непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал M, причем

$$\widetilde{M}_t = [(M_t^n)_{n=1}^{\infty}], \text{ где } M_t^n = (M * \rho_n)_t.$$

Дельта-последовательность ρ_n обладает следующими свойствами: $\rho_n \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\rho_n \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_n \subset [0;1/n]$, $\int_0^{1/n}\rho_n(s)ds = 1$. Введем функцию

$$F_n(x) = \int_x^{1/n}\rho_n(u)\mathrm{d}u, \quad x \in \mathbb{R},$$

тогда

$$M_t^n = \int_0^{1/n} M_{t+s}\rho_n(s)\mathrm{d}s = \int_0^{t+1/n} F_n(s-t)\mathrm{d}M_s. \quad (2.1)$$

Рассмотрим обобщенный стохастический интеграл

$$\tilde I_t = \int_{0+}^t f(\widetilde{M}_s)\mathrm{d}_{\tilde h}\widetilde{M}_s = \left[(I_t^n)_{n=1}^{\infty}\right]. \qquad (2.2)$$

Для упрощения обозначений мы будем рассматривать I_t^n из (2.2), опуская связь между h и n, то есть $t_0 = \{t/h\}h$, $t_k = t_0 + kh$, $m_t = [t/h]$ и

$$I_t^n = \sum_{k=0}^{m_t - 1} f(M_{t_k}^n)(M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n). \qquad (2.3)$$

Для описания случайного процесса I_t, ассоциированного обобщенным процессом $\tilde I_t$, необходимо рассмотреть предельное поведение суммы (2.3) при $n \to \infty$, $h \to 0$.

Везде далее будем рассматривать $t \in \mathbf{T} = [0, T]$. Введем случайную меру μ_{nh}

$$\mu_{nh}(t, B) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_B(t_k)\int_{t_k}^{t_k+h+1/n}\left[F_n(s-t_k-h) - F_n(s-t_k)\right]^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s, \qquad (2.4)$$

где B борелевское множество, а $\langle M\rangle$ – квадратичная вариация мартингала M [9, гл. II, §2].

***Теорема* 2.1.** *Пусть функция $f \in \mathbf{C}_{\mathbf{B}}^1(\mathbb{R})$, мартингал M непрерывен и квадратично-интегрируем. Если последовательность мер μ_{nh} из (2.4) сходится слабо, почти везде по $\mathbf{\Omega}$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ при $n \to \infty$, $h \to 0$, то предельная мера μ не зависит от t, и обобщенный стохастический интеграл $\tilde I_t$ из (2.2) ассоциирует случайный процесс I_t в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ и по вероятности, причем I_t имеет следующий вид*

$$I_t = \int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(M_s)(\mathrm{d}\langle M\rangle_s - \mu(\mathrm{d}s)).$$

***Замечание* 2.1.** *В случае если M броуновское движение, $\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \mathrm{d}s$ и сходимость мер μ_{nh} равносильна сходимости числовой последовательности*

$$K(n,h) = \int\limits_{\substack{0\le s,t\le 1/n \\ |s-t|\le h}} \left(1 - \frac{|s-t|}{h}\right)\rho_n(s)\rho_n(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Если $K(n,h)\to\theta$ при $n\to\infty$, $h\to 0$, то $\theta\in[0,1]$ и предельная мера имеет вид $\mu(\mathrm{d}u)=\theta\mathrm{d}u$. Тогда ассоциированный процесс I_t задается следующим образом

$$I_t = \int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s + \frac{1-\theta}{2}\int_0^t f'(M_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s .$$

Полученные результаты согласуются с работой [7].

***Замечание* 2.2.** *Если $nh\to\infty$, то для произвольного квадратично-интегрируемого непрерывного мартингала M*

$$I_t = \int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s,$$

то есть мера $\mu(\mathrm{d}s)$ совпадает с мерой $\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ и обобщенный стохастический интеграл ассоциирует интеграл Ито.

3 Вспомогательные утверждения

В силу определения (2.1), несложно видеть, что M_t^n является процессом с непрерывными траекториями и для любого $\omega\in\mathbf{\Omega}$, $t\in\mathbf{T}$ верно $\lim\limits_{n\to\infty} M_t^n = M_t$. Сформулируем необходимые вспомогательные утверждения.

***Лемма* 3.1.** *Для произвольного $u,t\in\mathbf{T}$ верно*

$$\left|\int_0^u [F_n(s-t-h)-F_n(s-t)]\mathrm{d}M_s\right| \le \max_{\substack{|s_1-s_2|\le h+\frac{1}{n} \\ 0\le s_1,s_2\le u}} |M_{s_1}-M_{s_2}|.$$

Доказательство. Используя интегрирование по частям и вид F_n получаем

$$\left|\int_0^u [F_n(s-t-h)-F_n(s-t)]\mathrm{d}M_s\right| =$$

$$= \left| M_u\int_u^{+\infty}(\rho_n(s-t-h)-\rho_n(s-t))\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \int_0^u M_s(\rho_n(s-t-h)-\rho_n(s-t))\mathrm{d}s\right| =$$

$$= \left|\int_0^{+\infty} M_{s\wedge u}(\rho_n(s-t-h)-\rho_n(s-t))\mathrm{d}s\right| =$$

$$= \left|\int_0^{+\infty}\left(M_{(s+h)\wedge u}-M_{s\wedge u}\right)\rho_n(s-t)\mathrm{d}s\right| \le$$

$$\le \max_{\substack{s_1,s_2\in[t,t+h+1/n] \\ 0\le s_1,s_2\le u}} |M_{s_1}-M_{s_2}| \left|\int_t^{t+1/n}\rho_n(s-t)\mathrm{d}s\right| \le$$

$$\le \max_{\substack{|s_1-s_2|\le h+1/n \\ 0\le s_1,s_2\le u}} |M_{s_1}-M_{s_2}|.$$

***Лемма* 3.2.** *Если мера μ_{nh} слабо сходится к мере μ для почти всех $\omega\in\mathbf{\Omega}$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ при $n\to\infty$, $h\to 0$, то предельная мера μ не зависит от t.*

Доказательство. Мера μ_{nh} слабо сходится к мере μ для почти всех $\omega\in\mathbf{\Omega}$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, значит для любой непрерывной g верно

$$\int_0^T\left|\int_0^T g(t,u)\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u) - \int_0^T g(t,u)\mu(t,\mathrm{d}u)\right|\mathrm{d}t \to 0$$

$$\text{при } n\to\infty, h\to 0.$$

Из определения (2.4) меры μ_{nh} следует что μ_{nh} является h-периодической функцией по t, а тогда

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T\int_0^T g(t,u)\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\sum_{k=0}^{L}\int_0^h\int_0^T g(t+kh,u)\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\frac{1}{h}\int_0^h\int_0^T\left(\sum_{k=0}^{L} g(t+kh,u)h\right)\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t.$$

По определению интеграла

$$\left(\sum_{k=0}^{L} g(t+kh,u)h\right) \to \int_0^T g(s,u)\mathrm{d}s,$$

значит

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\frac{1}{h}\int_0^h\int_0^T\left(\sum_{k=0}^{L} g(t+kh,u)h\right)\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)dt =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\frac{1}{h}\int_0^h\int_0^T\int_0^T g(s,u)ds\mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T\int_0^T g(s,u)\frac{1}{h}\int_0^h \mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

Обозначим $\nu_{nh}(du) = \frac{1}{h}\int_0^h \mu_{nh}(t,du)dt$. Очевидно

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T\int_0^T g(s,u)\frac{1}{h}\int_0^h \mu_{nh}(t,\mathrm{d}u)\mathrm{d}t\mathrm{d}s =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T\int_0^T g(s,u)\nu_{nh}(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.$$

По условию данный предел сходится для любых непрерывных функций g. Рассматривая функции g, зависящие только от u, получаем, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T g(u)\nu_{nh}(du)$$

существует для любых непрерывных g. Значит, последовательность мер $\nu_{nh}(\mathrm{d}u)$ слабо сходится к некоторой мере $\nu(\mathrm{d}u)$. То есть мы имеем, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}}\int_0^T\int_0^T g(s,u)\nu_{nh}(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s = \int_0^T\int_0^T g(s,u)\nu(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s.$$

В силу единственности предела получаем, что предельная мера μ совпадает с ν. Значит, μ не зависит от t.

***Замечание* 3.1.** *Явный вид предельной меры $\mu(\mathrm{d}u)$ можно получить, исследуя предельное поведение последовательности мер $\nu_{nh}(\mathrm{d}u)$.*

Для $l = 1, 2, ..., m_t$ введем обозначение $V_l^n = \sum_{k=0}^{l-1} [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2$. Докажем несколько вспомогательных утверждений для ограниченного мартингала.

***Лемма* 3.3.** *Если мартингал M и его квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ ограничены константой B, то для любого фиксированного $t \in \mathbf{T}$ справедлива оценка*

$$E(V_{m_t}^n)^2 \le 9B^2(1+2B).$$

Доказательство. По определению

$$(V_{m_t}^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} [M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{j=0}^{m_t-1} \left([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 [M_{t_{j+1}}^n - M_{t_j}^n]^2 \right).$$

Введем функцию

$$J_{t_k}(u) = \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] \mathrm{d}M_s. \quad (3.1)$$

В силу представления (2.1) и вида F_n для $v \ge t + 1/n$ верно

$$[M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n] =$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}+1/n} [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] \mathrm{d}M_s = J_{t_k}(v).$$

Тогда

$$(V_{m_t}^n)^2 = \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{j=0}^{m_t-1} J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) \quad \text{и}$$

$$E(V_{m_t}^n)^2 = \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{j=0}^{m_t-1} E\left(J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) \right).$$

Из вида (3.1) следует, что $J_{t_k}(u)$ является мартингалом, более того, по формуле Ито $J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v) = \int_0^v \mathrm{d}(J_{t_k}^2(u) J_{t_j}^2(u))$, где

$$d(J_{t_k}^2(u) J_{t_j}^2(u)) = 2J_{t_k}(u) J_{t_j}^2(u) dJ_{t_k}(u) +$$

$$+ 2J_{t_k}^2(u) J_{t_j}(u) dJ_{t_j}(u) + J_{t_j}^2(u) d\left\langle J_{t_k} \right\rangle_u +$$

$$+ J_{t_k}^2(u) d\left\langle J_{t_j} \right\rangle_u + 4J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) d\left\langle J_{t_k}, J_{t_j} \right\rangle_u.$$

Применяя математическое ожидание, получаем

$$E(J_{t_k}^2(v) J_{t_j}^2(v)) = E\int_0^v J_{t_j}^2(u) \mathrm{d}\left\langle J_{t_k} \right\rangle_u +$$

$$+ E\int_0^v J_{t_k}^2(u) \mathrm{d}\left\langle J_{t_j} \right\rangle_u + \quad (3.2)$$

$$+ 4E\int_0^v J_{t_k}(u) J_{t_j}(u) \mathrm{d}\left\langle J_{t_k}, J_{t_j} \right\rangle_u.$$

По определению $J_{t_k}(u)$ верно

$$\left\langle J_{t_k} \right\rangle_u = \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)]^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_s,$$

$$\left\langle J_{t_k}, J_{t_j} \right\rangle_u = \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] \times$$

$$\times [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}\langle M \rangle_s.$$

Суммируя выражения (3.2) по j, k, получаем, что

$$E(V_{m_t}^n)^2 = 2G_1 + 4G_2,$$

где

$$G_1 = E\int_0^v \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{j=0}^{m_t-1} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \right)^2 \times$$

$$\times [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)]^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_u,$$

$$G_2 = E\int_0^v \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{j=0}^{m_t-1} \int_0^u [F_n(s - t_{k+1}) - F_n(s - t_k)] \mathrm{d}M_s \times$$

$$\times \int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \times$$

$$\times [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)][F_n(u - t_{j+1}) - F_n(u - t_j)] \mathrm{d}\langle M \rangle_u.$$

Так как для любого w и $x \in \mathbb{R}$ верно $0 \le [F_n(x - w) - F_n(x)] \le 1$, то

$$[F_n(x - w) - F_n(x)]^2 \le [F_n(x - w) - F_n(x)].$$

Используя данный факт и ограниченность $\langle M \rangle$, получаем, что

$$G_1 \le E\int_0^v \left(\sum_{j=0}^{m_t-1} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \right)^2 \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} [F_n(u - t_{k+1}) - F_n(u - t_k)] \right) \mathrm{d}\langle M \rangle_u \le$$

$$\le E\left[\sum_{j=0}^{m_t-1} \left(\langle M \rangle_v \max_{0 \le u \le v} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \right)^2 \right) \right] \le$$

$$\le B\left(\sum_{j=0}^{m_t-1} E \max_{0 \le u \le v} \left(\int_0^u [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \right)^2 \right).$$

В силу неравенства Дуба [9, с. 36] выполняется $E \max_{0 \le u \le v} (J_{t_j}(u))^2 \le 4E(J_{t_j}(v))^2$, тогда

$$G_1 \le 4B\left(\sum_{j=0}^{m_t-1} E\left(\int_0^v [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \mathrm{d}M_s \right)^2 \right) =$$

$$= 4B \sum_{j=0}^{m_t-1} E\left(\int_0^v [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)]^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_s \right) \le$$

$$\le 4BE\int_0^v \left(\sum_{j=0}^{m_t-1} [F_n(s - t_{j+1}) - F_n(s - t_j)] \right) \mathrm{d}\langle M \rangle_s \le 4B^2.$$

Действуя аналогично для G_2 и используя лемму 3.1, получаем

$$G_2 \le E \max_{\substack{|s_1 - s_2| \le h + \frac{1}{n} \\ 0 \le s_1, s_2 \le u}} |M_{s_1} - M_{s_2}|^2 \times$$

$$\times \int_0^v [F_n(s - t) - F_n(s - t_0)]^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_u \le 4B^3.$$

Объединяя неравенства для G_1 и G_2, получаем требуемое утверждение.

***Лемма* 3.4.** *Если мартингал M и его квадратичная вариация $\langle M \rangle_t$ ограничены константой B, то для любого фиксированного $t \in \mathbf{T}$ верно*

$$E\left(\sum_{k=1}^{m_t-1} \left([M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}))\right) \right)^2 \to 0$$

при $n \to \infty, h \to 0$.

Доказательство. Введем функцию

$$I_{t_k}(u)=\int_0^u \left[F_n(s-t_k-h)-F_n(s-t_k)\right]^2 \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s. \quad (3.3)$$

В силу определения (2.4) меры μ_{nh} несложно видеть, что для любого k

$$\mu_{nh}([t_k,t_{k+1}))=I_{t_k}(v), \text{где } v\ge t+1/n.$$

Более того, в лемме 3.3 показано, что для J_{t_k}, заданной (3.1), верно $\left\langle J_{t_k}\right\rangle_u=I_{t_k}(u)$. Тогда

$$E\left(\sum_{k=1}^{m_t-1}\left([M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]^2-\mu_{nh}([t_k,t_{k+1}))\right)\right)^2=$$

$$=E\left(\sum_{k=1}^{m_t-1}\left(J^2_{t_k}(v)-I_{t_k}(v)\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{m_t-1}\Big(EJ^2_{t_k}(v)J^2_{t_j}(v)+EI_{t_k}(v)I_{t_j}(v)- -EJ^2_{t_k}(v)I_{t_j}(v)-EI_{t_k}(v)J^2_{t_j}(v)\Big). \quad (3.4)$$

Используя формулу Ито, можно показать, что выражение (3.4) имеет вид

$$E\left(\sum_{k=1}^{m_t-1}\left([M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]^2-\mu_{nh}([t_k,t_{k+1}))\right)\right)^2=$$

$$=4\sum_{k=1}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{m_t-1}E\int_0^v J_{t_k}(u)J_{t_j}(u)\mathrm{d}\left\langle J_{t_k},J_{t_j}\right\rangle_u.$$

Учитывая вид F_n и ограниченность $\left\langle M\right\rangle$, применим неравенство Коши-Буняковского и лемму 3.1, тогда

$$\sum_{k=1}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{m_t-1}E\int_0^v J_{t_k}(u)J_{t_j}(u)\mathrm{d}\left\langle J_{t_k},J_{t_j}\right\rangle_u\le$$

$$\le BE\max_{\substack{|s_1-s_2|\le h+\frac{1}{n}\\ 0\le s_1,s_2\le v}}|M_{s_1}-M_{s_2}|^2.$$

В силу ограниченности и равномерной непрерывности M на $[0,v]$ по теореме Лебега

$$E\max_{\substack{|s_1-s_2|\le h+\frac{1}{n}\\ 0\le s_1,s_2\le v}}|M_{s_1}-M_{s_2}|^2\to 0 \text{ при } n\to\infty, h\to 0.$$

Таким образом, требуемая сходимость доказана.

4 Доказательство основных результатов

***Лемма* 4.1.** *Пусть функция* $f\in \mathbf{C}^1_{\mathbf{B}}(\mathbb{R})$, *непрерывный квадратично-интегрируемый мартингал* M *и его квадратичная вариация* $\left\langle M\right\rangle_t$ *ограничены константой* B. *Если последовательность мер* μ_{nh} *из* (2.4) *сходится слабо, почти везде по* $\mathbf{\Omega}$ *и в* $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ *при* $n\to\infty$, $h\to 0$, *то предельная мера* μ *не зависит от* t, *и обобщенный стохастический интеграл* $\tilde{I}_t$ *из* (2.2) *ассоциирует случайный процесс* I_t *в* $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ *и в* $\mathbf{L}^1(\mathbf{\Omega})$, *причем* I_t *имеет следующий вид*

$$I_t=\int_0^t f(M_s)dM_s+\frac{1}{2}\int_0^t f'(M_s)(\mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s-\mu(\mathrm{d}s)).$$

Доказательство. По условию $f\in \mathbf{C}^1_{\mathbf{B}}(\mathbb{R})$, значит, $F(y)=\int_0^y f(x)\mathrm{d}x$ дважды непрерывно-дифференцируема и по формуле Тейлора верно

$$F(x)=F(x_0)+f(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f'(\xi)(x-x_0)^2,$$

где точка $\xi\in[x_0;x]$. Рассмотрим $\{t_k\}$ разбиение отрезка $[0,t]$ с шагом h, зафиксируем $\omega\in\mathbf{\Omega}$ и в качестве точек x и x_0 рассмотрим $M_{t_{k+1}}$ и M_{t_k}. Тогда

$$F(M_{t_{k+1}})-F(M_{t_k})= =f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]+\frac{1}{2}f'(\xi)[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]^2. \quad (4.1)$$

Обозначим ξ через $\overline{M}_{t_k}$, тогда

$$M_{t_{k+1}}\wedge M_{t_k}\le \overline{M}_{t_k}\le M_{t_{k+1}}\vee M_{t_k}.$$

Рассматривая сумму выражений вида (4.1), получаем

$$\int_0^{M_t} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{M_{t_0}} f(x)\mathrm{d}x=F(M_t)-F(M_{t_0})=$$

$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[F(M_{t_{k+1}})-F(M_{t_k})\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]+ +\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}f'(\overline{M}_{t_k})[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]^2. \quad (4.2)$$

Поступая аналогично (4.2) для $M^n_{t_{k+1}}$ и $M^n_{t_k}$, получаем

$$\int_0^{M^n_t} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{M^n_{\tau_t}} f(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}f(M^n_{t_k})[M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]+ +\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}f'(\overline{M}^n_{t_k})[M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]^2. \quad (4.3)$$

Учитывая равенства (4.3) и (4.2), получаем

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}f(M^n_{t_k})[M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]-\int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}f(M_{t_k})[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]-\int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s\right)+$$

$$+\left(\int_0^{M^n_t} f(x)dx-\int_0^{M_t} f(x)dx\right)+\left(\int_0^{M_{\tau_t}} f(x)dx-\int_0^{M^n_{\tau_t}} f(x)dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}f'(\overline{M}_{t_k})[M_{t_{k+1}}-M_{t_k}]^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}f'(\overline{M}^n_{t_k})[M^n_{t_{k+1}}-M^n_{t_k}]^2\right)=$$

$$=J_1+J_2+J_3+\frac{1}{2}J_4-\frac{1}{2}J_5. \quad (4.4)$$

Используя доказательство формулы Ито [9, С. 76–77], можно показать, что при $h \to 0$ верно $J_1 \to 0$, $J_4 \to \int_0^t f'(M_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ в $\mathbf{L}^1(\Omega)$. В силу сходимости $M^n \to M$, ограниченности f и M, теорема Лебега влечет $J_2 \to 0$, $J_3 \to 0$ в $\mathbf{L}^1(\mathbf{\Omega})$. Покажем, что $J_5 \to \int_0^t f'(M_s)\mu(\mathrm{d}s)$ в $\mathbf{L}^1(\mathbf{\Omega})$ при $n \to \infty$, $h \to 0$. Мера μ – предел мер μ_{nh}, заданных (2.4), и в силу леммы 3.2 не зависит от t.

Обозначим

$$J'_5 = \sum_{k=0}^{m_t-1} f'(M_{t_k})[M^n_{t_{k+1}} - M^n_{t_k}]^2,$$

$$J''_5 = \sum_{k=0}^{m_t-1} f'(M_{t_k})\mu_{nh}([t_k, t_{k+1})).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и лемму 3.3, получаем

$$E\,|J_5 - J'_5| \le$$

$$\le E\left(\sup_k |f'(\overline{M}^n_{t_k}) - f'(M_{t_k})|\,|\sum_{k=0}^{m_t-1}[M^n_{t_{k+1}} - M^n_{t_k}]^2|\right) \le$$

$$\le \left(E\sup_k |f'(\overline{M}^n_{t_k}) - f'(M_{t_k})|^2\right)^{1/2}\left(E(V^n_{m_t})^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le 9B^2(1+2B)\left(E\sup_k |f'(\overline{M}^n_{t_k}) - f'(M_{t_k})|^2\right)^{1/2}.$$

Так как f' непрерывна и $M^n \to M$, то

$$\sup_k |f'(\overline{M}^n_{t_k}) - f'(M_{t_k})|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty, h \to 0.$$

По условию и f' и M ограничены, тогда по теореме Лебега

$$\int_0^T E\,|J_5 - J'_5|\,\mathrm{d}t \to 0 \text{ при } n \to \infty, h \to 0.$$

В силу ограниченности f'

$$E(J'_5 - J''_5)^2 \le$$

$$\le C^2 E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\left([M^n_{t_{k+1}} - M^n_{t_k}]^2 - \mu_{nh}([t_k, t_{k+1}))\right)\right)^2.$$

По лемме 3.4 верно $E(J'_5 - J''_5)^2 \to 0$, а значит, и $E\,|J'_5 - J''_5| \to 0$. Так как по условию μ_{nh} слабо сходится к μ почти везде по $\mathbf{\Omega}$ и в $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, то по лемме 3.2 предельная мера μ не зависит от t и

$$\int_0^T E\left|J''_5 - \int_0^t f'(M_s)\mu(\mathrm{d}s)\right|\mathrm{d}t =$$

$$= E\int_0^T\left|\int_0^t f'(M_s)\left[\mu_{nh}(t, \mathrm{d}s) - \mu(\mathrm{d}s)\right]\right|\mathrm{d}t \to 0$$

при $n \to \infty$, $h \to 0$. Объединяя полученные оценки, приходим к выводу, что

$$E\int_0^T\left|J_5 - \int_0^t f'(M_s)\mu(t, \mathrm{d}s)\right|\mathrm{d}t \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty, h \to 0.$$

Объединяя полученные предельные выражения для J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 из (4.4), получаем, что лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для произвольного непрерывного квадратично-интегрируемого мартингала M введем последовательность моментов остановки

$$\sigma_m = \inf\{t : |M_t| > m \text{ или } |\langle M\rangle_t| > m\}.$$

Обозначим процесс, остановленный в момент σ_m, через $M^{\sigma_m}_t = M_{t\wedge\sigma^m}$. По построению $\sigma_m \nearrow \infty$, поэтому $M^{\sigma_m}_t \to M_t$ и $\langle M^{\sigma_m}\rangle_t \to \langle M\rangle_t$ для любого $t \in \mathbf{T}$ и почти всех $\omega \in \mathbf{\Omega}$. Мера μ_{nh} совпадает с мерой $\mu^{\sigma_m}_{nh}$, заданной по остановленному процессу $M^{\sigma_m}_t$, для любого фиксированного t и интервала (a,b), если $b < \sigma_m - h - \frac{1}{n}$. По условию последовательность мер μ_{nh} сходится к мере μ, значит в силу леммы 3.2 предельная мера μ не зависит от $t \in \mathbf{T}$. Тогда последовательность мер $\mu^{\sigma_m}_{nh}$ по остановленному процессу также сходится к мере μ^{σ_m}, не зависящей от $t \in \mathbf{T}$, причем

$$\mu^{\sigma_m}(a;b) = \mu(a \wedge \sigma_m; b \wedge \sigma_m).$$

Очевидно, $\mu^{\sigma_m} \to \mu$ при $m \to \infty$ поточечно по t и ω. Введем обозначение

$$H_{nh}(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M^n_{t_k})(M^n_{t_{k+1}} - M^n_{t_k}) -$$

$$-\int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t f'(M_s)(\mathrm{d}\langle M\rangle_s - \mu(\mathrm{d}s)).$$

Необходимо показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\int_0^T |H_{nh}(t)|\,\mathrm{d}t > \varepsilon\right) \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty, h \to 0.$$

Введем аналогичное обозначение для остановленного процесса $M^{\sigma_m}_t$

$$H^{\sigma_m}_{nh}(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M^{\sigma_m n}_{t_k})(M^{\sigma_m n}_{t_{k+1}} - M^{\sigma_m n}_{t_k}) -$$

$$-\int_0^t f(M^{\sigma_m}_s)\mathrm{d}M^{\sigma_m}_s -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f'(M^{\sigma_m}_s)(\mathrm{d}\langle M^{\sigma_m}\rangle_s - \mu^{\sigma_m}(\mathrm{d}s)).$$

Тогда справедливо

$$H_{nh}(t) = H^{\sigma_m}_{nh}(t) + \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(M^n_{t_k})(M^n_{t_{k+1}} - M^n_{t_k}) -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{m_t-1} f(M^{\sigma_m n}_{t_k})(M^{\sigma_m n}_{t_{k+1}} - M^{\sigma_m n}_{t_k})\right) -$$

$$-\left(\int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s - \int_0^t f(M^{\sigma_m}_s)\mathrm{d}M^{\sigma_m}_s\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_0^t f'(M_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s - \int_0^t f'(M^{\sigma_m}_s)\mathrm{d}\langle M^{\sigma_m}\rangle_s\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^t f'(M_s)\mu(\mathrm{d}s) - \int_0^t f'(M^{\sigma_m}_s)\mu^{\sigma_m}(\mathrm{d}s)\right). \quad (4.5)$$

Для ограниченного процесса M_t с ограниченной квадратичной вариацией $\langle M \rangle$ в силу леммы 4.1 имеет место сходимость в $\mathbf{L}^1(\mathbf{\Omega})$ и $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, значит, справедлива и сходимость по вероятности. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, для любых $m = 1, 2, \ldots$ верно

$$P\left(\int_0^T | H_{nh}^{\sigma_m}(t) | \mathrm{d}t > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty, h \to 0.$$

Учитывая, что $M_t^{\sigma_m}$ совпадает с M_t и $\left\langle M^{\sigma_m} \right\rangle_t$ совпадает с $\langle M \rangle_t$ для $t < \sigma_m$, то для других слагаемых в выражении (4.5) верны следующие оценки

$$P\left(\int_0^T \left| \sum_{k=0}^{m_t - 1} f(M_{t_k}^n)(M_{t_{k+1}}^n - M_{t_k}^n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{m_t-1} f(M_{t_k}^{\sigma_m n})(M_{t_{k+1}}^{\sigma_m n} - M_{t_k}^{\sigma_m n}) \right| \mathrm{d}t > \varepsilon \right) \le P(\sigma_m < 2T),$$

$$P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f(M_s)\mathrm{d}M_s - \int_0^t f(M_s^{\sigma_m}) dM_s^{\sigma_m} \right| \mathrm{d}t > \varepsilon \right) \le$$

$$\le P(\sigma_m < T),$$

$$P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f'(M_s)\mathrm{d}\langle M \rangle_s - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m}) d\left\langle M^{\sigma_m} \right\rangle_s \right| \mathrm{d}t > \varepsilon \right) \le P(\sigma_m < T),$$

$$P\left(\int_0^T \left| \int_0^t f'(M_s)\mu(\mathrm{d}s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^t f'(M_s^{\sigma_m})\mu^{\sigma_m}(\mathrm{d}s) \right| \mathrm{d}t > \varepsilon \right) \le P(\sigma_m < T).$$

По условию $P(\sigma_m < T) \to 0$ при $m \to \infty$. Значит, переходя к пределу сначала при $n \to \infty$ и $h \to 0$, а потом при $m \to \infty$, выражение (4.5) влечет требуемое предельное соотношение

$$P\left(\int_0^T |H_{nh}(t)| \mathrm{d}t > \varepsilon\right) \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty, h \to 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели обобщенный стохастический интеграл вида (0.1) по обобщенному случайному процессу, ассоциирующему квадратично-интегрируемый непрерывный мартингал. В зависимости от связи между обобщенным дифференциалом $\mathrm{d}_{\tilde{h}}$ и обобщенным случайным процессом, обобщенный стохастический интеграл ассоциирует различные стохастические интегралы, вид которых определяет теорема 2.1. Полученные результаты востребованы при изучении стохастических уравнений в дифференциалах вида (0.2) для непрерывных мартингалов. Обобщенный случайный процесс, являющийся решением уравнения (0.2), ассоциирует обычный случайный процесс. Вид этого случайного процесса напрямую зависит от общего вида стохастического интеграла, который и построен в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Itô, K.* Stochastic integral / K. Itô. // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – Vol. 20. – P. 519–524.

2. *Fisk, D.L.* Quasi-martingales and stochastic integrals / D.L. Fisk // Tech. Rep. – Vol. 1, Dept. Math. Michigan State Univ. – 1963.

3. *Стратонович, Р.Л.* Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений / Р.Л. Стратонович // Вестник Московского ун-та. – 1964. – Т. 1. – С. 3–12.

4. *Ogawa, S.* On a Riemann definition of the stochastic integral. I, II / S. Ogawa // Proc. Japan Acad. – 1970. – Vol. 46, № 21. – P. 153–157, 158–161.

5. *Лазакович, Н.В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 17–22.

6. *Лазакович, Н.В.* Некоторые аппроксимации стохастических θ-интегралов / Н.В. Лазакович, С.П. Сташулёнок, О.Л. Яблонский // Литовский матем. сборник. – 1999. – Т. 39, № 2. – С. 248–256.

7. *Lazakovich, N.V.* On the approximation of the solutions of stochastic equations with θ-integrals / N.V. Lazakovich, A.L. Yablonski // Stochastics and Stochastics Reports. – 2004. – Vol. 76, № 2. – P. 135–145.

8. *Лазакович, Н.В.* Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – Т. 50, № 4. – С. 711–732.

9. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда – М. : Наука, 1986. – 445 с.

Поступила в редакцию 26.04.11.