Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 19F05, 14G15

О гомоморфизме Като-Паршина для n-мерных общих локальных полей

В.И.Андрийчук

А.Н. Паршин, С.В. Востоков, И.Б. Фесенко и К. Като в серии работ [1-4] построили теорию полей классов для n-мерных локальних полей в терминах K — групп Милнора. Б.М. Беккер [5] показал, что используя метод Фесенко, который, в свою очередь, основывается на идеях Нойкирха, можно построить n-мерную локальную теорию полей классов для n-мерных локальних полей ненулевой характеристики с квазиконечными полями вычетов. Отметим, что Б.М. Беккер получил свои результаты не используя когомологической техники.

Определение. n-мерным ($n \geq 0$) локальным (соответственно общим локальным, соответственно псевдолокальным) полем мы называем цепь полей $k_0, \cdots, k_n$ с такими свойствами:

(1) k_0 — конечное (соответственно квазиконечное, соответственно псевдоконечное) поле;

(2) для каждого $i = 1, \cdots, n$, k_i — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов k_{i-1}.

Мы будем обозначать поле k_n через K, а поле k_0 через k.

Через $H^i(K, M)$ обозначаем когомологии Галуа $Gal(K_{sep}/K)$ — модуля M, K_{sep} — сепарабельное замыкание поля K. Другие обозначения будем вводить по мере необходимости.

В этой работе мы доказываем, что часть результатов К. Като о теории полей классов n-мерного локального поля с конечным полем вычетов остается в силе и для n-мерных локальных полей с квазиконечными полями вычетов характеристики нуль. А именно, мы рассматриваем, в основном, n-мерные общие локальные поля формальных степенных рядов $k((t_1, \cdots, t_n))$, где k — квазиконечное поле характеристики нуль. Наверно, все сформулированные в этой работе утверждения верны без каких-либо ограничений на характеристику, то есть верны для любых n-мерных общих локальных полей. Случаи полей ненулевой характеристики p, а также случаи, когда поле вычетов k_{i-1} имеет ненулевую характеристику, а поле k_i имеет характеристику нуль для некоторого i, $1 \leq i \leq n$, являются более трудными в сравнении с тем случаем, который рассматривается в этой статье, и еще требуют своего исследования. Отметим, что часть промежуточных результатов этой статьи формулируется и доказывается в более общей ситуации.

Предложение 1. *Пусть k — квазиконечное поле, m — натуральное число, $\mathrm{char} k$ не делит m, μ_m — группа корней m — ой степени с единицы в алгебраическом замыкании поля k, $\mu_m^{\otimes n} = \mu_m \otimes \cdots \otimes \mu_m$ — n — кратное тензорное произведение с очевидным действием группы $Gal(K_{sep}/K)$. Тогда*

$$H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}.$$

Доказательство. Пусть $H^q(K) = \lim_{\rightarrow} H^q(K, \mu_m^{q-1})$, где индуктивный предел берется по всем m, взаимно простым с характеристикой поля k. Согласно лемме 2, §3.2, часть II работы [4] имеем расщепляемую точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^{q+1}(k_{i-1}) \xrightarrow{j} H^{q+1}(k_i) \xrightarrow{\delta} H^q(k_{i-1}) \longrightarrow 0$$

для каждого $q \geq 1$, $1 \leq i \leq n$. Точная последовательность (1) получается переходом к индуктивному пределу в точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^{q+1}(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes q}) \xrightarrow{j_m} H^{q+1}(k_i, \mu_m^{\otimes q})$$

$$\xrightarrow{\delta_m} H^q(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes q-1}) \to 0, \qquad (2)$$

где j_m — гомоморфизм ($(k_i)_{nr}$ — означает максимальное неразветвленное расширение поля k_i)

$$H^{q+1}(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes q}) = H^q(Gal(k_i)_{nr}/k_i), H^0(k_i)_{nr}, \mu_m^{\otimes q})) \xrightarrow{inf}$$

$$\xrightarrow{inf} H^{q+1}(k_i, \mu_m^{\otimes q}),$$

индуцированный инфляцией, а δ_m — композиция гомоморфизмов

$$\delta_m : H^{q+1}(k_i, \mu_m^{\otimes q}) \longrightarrow H^q(k_{i-1}, H^1((k_i)_{nr}, \mu_m^{\otimes q})) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^q(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes q-1} \otimes ((k_i)^*_{nr}/(k_i)^{*m}_{nr})) \longrightarrow H^q(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes q-1}).$$

1

Когомологическая размерность квазиконечного поля равна 1, поэтому [6]

$$H^{n+1}(k_{n-1}, \mu_m^{\otimes n}) = 0.$$

Учитывая, что также

$$H^{i+1}(k_{i-1}, \mu_m^{\otimes i}) = 0$$

для всех ÿ, $1 \leq i \leq n$, с точной последовательности (2) получаем при $q = i, 1 \leq i \leq n$

$$H^{n+1}(k_n, \mu_m^{\otimes n}) \cong H^n(k_{n-1}, \mu_m^{\otimes n-1}),$$

$$H^n(k_{n-1}, \mu_m^{\otimes n-1}) \cong H^{n-1}(k_{n-2}, \mu_m^{\otimes n-2}),$$

$$\ldots . \ldots . \ldots$$

$$H^2(k_1, \mu_m) \cong H^1(k_0, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}),$$

$$H^1(k_0, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}.$$

Последний изоморфизм получается в силу квазиконечности поля k_0 :

$$H^1(k_0, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) = Hom(\hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}.$$

Следствие 2. *Сохраняя условия предложения 1, предположим дополнительно, что* $char k = 0$. *Тогда*

$$H^{n+1}(K) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Доказательство. Достаточно взять результат предложения 1 и перейти к индуктивному пределу.

Далее мы используем K — группы Милнора $K_n(K)$ поля K. По определению $K_0(K) = \mathbf{Z}$, $K_1(K) = K^*$, и для $n \geq 2$ $K_n(K) = K^{\otimes n}/J$, где $K^{\otimes n}$ — тензорное произведение n экземпляров группы K^*, а I - подгруппа этого тензорного произведения, порожденная всеми элементами вида $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ со свойством $x_i + x_j = 1$ для некоторых i, j, $1 \leq$

$i \neq j \leq n$. Элемент группы $K_n(K)$ с представителем $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ мы обозначаем далее $\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\}$.

К.Като [4] и А.Н.Паршин [2] определили гомоморфизм

$$\Psi_K : K_n(K) \to Gal(K^{ab}/K)$$

из n — ой группы Милнора n-мерного локального поля K в группу Галуа максимального абелева расширения поля K. Мы воспроизводим здесь определение, предложенное К.Като, как для удобства читателя, так и для того, чтобы обратить внимание на то, что это определение годится и для n-мерных общих локальных полей.

Прежде всего, с точной последовательности Куммера

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow K^* \xrightarrow{m} K^* \longrightarrow 1$$

получаем, переходя к когомологиям, изоморфизм

$$h^1_{m,K} : K^*/K^{*m} \to H^1(K, \mu_m). \tag{3}$$

Используя изоморфизм (3), можем определить гомоморфизмы

$$h^n_{m,K} : K_n(K) \to H^n(K, \mu_m^{\otimes n}),$$

для которых

$$h^n_{m,K}(\{x_1, \cdots, x_n\}) = h^1_{m,K}(x_1) \cup \cdots \cup h^1_{m,K}(x_n),$$

где $\cup$ означает $\cup$ — произведение.

Теперь рассмотрим произведение

$$H^1(K, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \times K_n(K) \to H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \tag{4}$$

(последний изоморфизм существует в силу предложения 1), которое ставит в соответствие паре $\chi \in H^1(K, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}), \{x_1, \cdots, x_n\} \in K_n(K)$ $\cup$ — произведение

$$\chi \cup h^n_{m,K}\{x_1, \cdots, x_n\} \in H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Переходя в (4) к индуктивному пределу по m, получаем в предположении $chark_0 = 0$ произведение

$$H^1(K) \times K_n(K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}. \tag{5}$$

Произведение (5) и определяет гомоморфизм

$$\Psi_K : K_n(K) \to Hom(H^1(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to Gal(K^{ab}/K).$$

Теорема 3. *Пусть K — n-мерное общее локальное поле. Предположим, что $chark_0 = 0$. Тогда для каждого конечного абелева расширения L/K существует канонический гомоморфизм нормы*

$$N_{L/K} : K_n(L) \to K_n(K),$$

такой, что гомоморфизм Ψ_K индуцирует изоморфизм

$$K_n(K)/N_{L/K}K_n(L) \to Gal(L/K).$$

Доказательство. Существование норменного гомоморфизма доказано Бассом и Тэйтом, а его каноничность доказана Като в [4, часть II]. Напомним свойства этого гомоморфизма, необходимые для доказательства теоремы.

В случае $n = 1$ норменный гомоморфизм является просто норменным гомоморфизмом $N_{L/K} : L^* \to K^*$; если $n > 1$, то $N_{L/K} : K_n(L) \to K_n(K)$ имеет свойство $N_{L/K}(\{x, y\}) = \{N_{L/K}x, y\}$, где $x \in K_i(L), y \in K_j(K)$ и это свойство позволяет дать определение гомоморфизма $N_{L/K}$ по индукции.

Из определения гомоморфизма Ψ_K и норменного гомоморфизма $N_{L/K}$ следует коммутативность диаграммы ([4], часть II, ст.661)

$$\begin{array}{ccc} K_n(L) & \xrightarrow{\Psi_L} & Gal(L^{ab}/L) \\ \downarrow N_{L/K} & & \downarrow \\ K_n(K) & \xrightarrow{\Psi_K} & Gal(K^{ab}/K), \end{array}$$

поэтому для абелевых расширений L/K гомоморфизм Ψ_K индуцирует гомоморфизм

$$K_n(K)/N_{L/K}K_n(L) \to Gal(L/K).$$

Доказательство биективности этого гомоморфизма с помощью использования коммутативной диаграммы ([4], часть II, ст. 671), строки которой являются точными последовательностями

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_n(K')/N_{L/K'}K_n(L) & \xrightarrow{N_{K'/K}} & K_n(K)/N_{L/K}K_n(L) & \longrightarrow \\ & & \downarrow \Psi'_K & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & Gal(L/K') & \longrightarrow & Gal(L/K) & \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \longrightarrow & K_n(K)/N_{K'/K}K_n(K') & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow \Psi_K & & \\ \longrightarrow & Gal(K'/K) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

редуцируется к доказательству для циклических расширений, что в свою очередь сводится к доказательству точности последовательности

$$K_n(L) \xrightarrow{N_{L/K}} K_n(K) \xrightarrow{\bar{\Psi}} H^{n+1}(K) \longrightarrow H^{n+1}(L),$$

где $\bar{\Psi}(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \chi \cup h^n_{m,K}\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\chi \in H^1(K)$ — характер поля K, который отвечает циклическому расширению L/K.

При наших предположениях на поле K достаточно рассмотреть случаи неразветвленных и чисто слабо разветвленных расширений простой степени p. К.Като показал [4, часть II, ст. 671], что для неразветвленного циклического расширения l_i/k_i, i-мерного общего локального поля k_i простой степени p существует коммутативная диаграмма (в которой l_{i-1} соответствующее l_i расширение поля вычетов)

$$\begin{array}{ccc} K_{i-1}(k_{i-1})/N_{l_{i-1}/k_{i-1}}K_{i-1}(l_{i-1}) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_{k_{i-1}}} & H^i(k_{i-1})_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_i(k_i)/N_{l_i/k_i}K_i(l_i) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_{k_i}} & H^{i+1}(k_i)_p, \end{array} \qquad (6)$$

в которой вертикальные стрелки являются изоморфизмами.

Таким же образом, согласно Като [4] для чисто слабо разветвленного расширения l_i/k_i существует коммутативная диаграмма (7), вертикальные стрелки которой, а также верхняя горизонтальная стрелка, являются изоморфизмами:

$$\begin{array}{ccc} K_i(k_{i-1})/pK_i(k_{i-1}) & \xrightarrow{h^i_{p,k_{i-1}}} & H^i(k_{i-1})_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_i(k_i)/N_{k_i/k_{i-1}}(l_i) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_{k_i}} & H^{i+1}(k_i)_p. \end{array} \qquad (7)$$

Коммутативные диаграммы (6) и (7) позволяют доказать теорему 3 по индукции, так как для $i = 0$ утверждение теоремы очевидно (а для $i = 1$ справедливость теоремы следует из теории полей классов для обычного общего локального поля [8].

Следующая теорема дает связь между группой Брауэра n-мерного общего локального поля K, для которого $chark = 0$, с $n-1$-мерной группой Милнора поля K.

Теорема 4. *Пусть K — n-мерное общее локальное поле, для которого $chark = 0$. Тогда существует инъективный гомоморфизм*

$$\Phi_K : BrK \to Hom(K_{n-1}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

для которого $\Phi_K((\chi, a))(b) = \chi(\Psi_K(a, b))$ для произвольного $\chi \in H^1(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $a \in K^*$, $(\chi, a) \in BrK$ — элемент группы Брауэра поля K, определенный в §1 Главы 14 книги [8], $b \in K_{n-1}(K)$.

Доказательство. Мы используем схему доказательства, которое предложил К.Като для аналогичного свойства группы Брауэра n-мерного локального поля ([4], часть II, предложение 3, ст.674). По следствию из леммы 16 второй части работы [4] для произвольного поля k группа $H^2(k) = \lim_\to H^2(k, \mu_m)$ изоморфна группе Брауэра поля k. Используя этот факт и определенный выше гомоморфизм $h^n_{m,K}$ для n-мерного общего локального поля K, можем рассмотреть произведение

$$BrK \times K_{n-1}(K) \xrightarrow{h_K} H^{n+1}(K) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \qquad (8)$$

(последний изоморфизм — это изоморфизм из следствия 2), которое паре (w, a) ставит в соответствие $\cup$ — произведение $w \cup \lim_\to h^{n-1}_{m,K}(\{x_1, \cdots, x_{n-1}\})$, где $w \in BrK = H^2(K)$, $\lim_\to h^{n-1}_{m,K}$ — индуктивный предел определенных выше гомоморфизмов $h^{n-1}_{m,K}$, $\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \in K_{n-1}(K)$. Произведение (8) определяет гомоморфизм

$$\Phi_K : BrK \to Hom(K_{n-1}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

В работе [4] К.Като показал, что доказательство инъективности гомоморфизма Φ_K сводится к доказательству инъективности гомоморфизма

$$\phi_{L/K} : K^*/N_{L/K}L^* \to Hom(K_{n-1}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

$$a \to (b \to \Phi_K(\{\chi, a\})(b) = \chi \circ \Psi_K(\{a, b\}),$$

где p — простое число, χ — характер порядка p поля K, L/K — соответствующее характеру χ циклическое расширение степени p.

Инъективность гомоморфизма $\phi_{L,K}$ доказываем индукцией по n. Если $n = 1$, то L/K — циклическое расширение простой степени обычного общего локального поля K

и инъективность гомоморфизма $\phi_{L/K}$ следует из теории полей классов общих локальных полей.

Для обоснования шага индукции, при наших предположениях на поле K, достаточно рассмотреть два случая.

1) Пусть L/K — неразветвленное расширение простой степени p, E/F — соответствующее расширение полей вычетов полей K и L. К.Като [4] доказал, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^*/N_{L/K}L^* & \xrightarrow{\phi_{L/K}} & Hom(K_{n-1}(K)/U_{n-1}^{(1)}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ F^*/N_{E/F}E^* & \xrightarrow{\phi_{E/F}\oplus\chi\circ\Psi_F} & Hom(K_{n-2}(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus Hom(K_{n-1}(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \end{array} \tag{9}$$

в которой вертикальные стрелки являются изоморфизмами, χ — характер соответствующий расширениям E/F и L/K, $U_{n-1}^{(1)}(K)$ — подгруппа группы $K_{n-1}(K)$, порожденная элементами вида $\{1+y, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$, где $y \in M_K$ (M_K — максимальный идеал кольца целых дискретно нормированного поля K с полем вычетов F), $x_2, \cdots, x_{n-1} \in K^*$.

2) Если L/K — вполне разветвленное расширение простой степени p, то поле K содержит первообразный корень p-ой степени из единицы и существует коммутативная диаграмма ([4], ст.676)

$$\begin{array}{ccc} K^*/N_{L/K}(L^*) & \xrightarrow{\Psi_{L,K}} & Hom(K_{n-1}(K)/pK_{n-1}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow \\ F^*/F^{*p} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & Hom(K_{n-1}(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \end{array} \tag{10}$$

в которой левая вертикальная стрелка является изоморфизмом и $\tilde{\Psi}_F$ — мономорфизм.

Диаграммы (9) и (10) позволяют обосновать шаг индукции и, таким образом, инъективность гомоморфизма Φ_K доказана.

Abstract. It is proved that for an n-dimensional general local field $K = k_0((t_1, \cdots, t_n))$ the homomorphism defined by Kato and Parshin induces the isomorphism between the groups $K_n(K)/N_{L/K}K_n(L)$ and $Gal(L/K)$ for any finite abelian extension L/K.

Литература

[1] С.В.Востоков, *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля,* Изв. АН СССР. Сер. матем. Т.49. 2. 1985. С.283–308.

[2] А.Н.Паршин, *Локальная теория полей классов,* Труды Мат. ин-та АН СССР. Т. 165. 1984. С. 143–170.

[3] И.Б.Фесенко, *Многомерная локальная теория полей классов. II,* Алгебра и анализ. Т.3. 1991. 5. С.168–189.

[4] K.Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, I, II, III,* J. Fac. Sci. Tokio. Sect.1A. I. V.26. 1979. P.303-376.; II. V.27. 1980. P. 603-683.; III. V.29. 1982. P.31–43.

[5] Б.М.Беккер, *Абелевы расширения полного дискретно нормированного поля конечной высоты,* Алгебра и анализ. Т.3. 6. 1991. С.76–84.

[6] Ж.-П.Серр, *Когомологии Галуа*, М.: Мир. 1968. 208 с.

[7] H.Bass, J.Tate, *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-Theory II. Lecture Notes in Math. No342. 1972. P.349–446.

[8] J.P.Serre, *Corps locaux*, Paris. Hermann. 1962.

Львовский Национальный университет
им. Ивана Франко

Поступило 20.03.2001