Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 15A51

О некоторых свойствах полугруппы полустохастических матриц

Л.А.Вотякова

Введение

В начале XX столетия русский математик Марков А.А. построил вероятностную модель (известную теперь под названием "цепь Маркова"), основой которой является стохастическая матрица, то есть квадратная матрица с неотрицательными элементами, причем сумма элементов в каждой строке равняется единице. В дальнейшем стохастические матрицы с одной стороны, изучались как частный случай квадратных матриц с действительными элементами [1], [2], с другой стороны, интенсивное развитие теории цепей Маркова позволило обнаружить новые свойства таких матриц [3], [4].

В работе [5] при вычислении некоторых характеристик марковских и полумарковских процессов для графа, порожденного стохастической матрицей, были введены числовые характеристики его вершин (сумма индексов нижних решеток), которые были положены в основу графо-аналиточеского метода изучения свойств таких матриц.

Наиболее естественными являются два направления обобщения понятия стохастической матрицы: первое — снятие нормировки единицей суммы элементов строки (достаточно хорошо разработанная теория неотрицательных матриц [2], [6]), второе (предложенное нами [7]) — снятие неотрицательности элементов матрицы, то есть рассмотрение матриц над полем R, у которых сумма элементов в каждой строке равна единице.

В результате такого обобщения приходим к достаточно интересной полугруппе Клиффорда, а введенная нами операция полустохастического обрамления матрицы позволяет эффективно применить графо-аналитический метод при решении некоторых классических задач алгебры.

Частично результаты этой работы анонсировались в [8].

Автор благодарен членам алгебраического семинара Винницкого педуниверситета и его руководителю Сохацкому Ф.Н. за те замечания, которые были сделаны при обсуждении данной работы.

1. Полугруппа полустохастических матриц

Пусть S_n — множество всех квадратных полустохастических матриц порядка n над полем R, то есть множество матриц вида

$$A = (a_{ij}),$$

где $a_{ij} \in R$, $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(i, j = \overline{1,n})$. Поскольку для любых матриц A, $B \in S_n$

$$\Sigma_{k=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} \Sigma_{k=1}^{n} b_{jk} = 1,$$

то S_n — полугруппа с единицей. Кроме того, если матрица A — неособенная и

$$A^{-1} = (\overline{a_{ij}}) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

то из равенства $A^{-1}A = E$ для i-той строки имеем:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{i1}a_{11} + \bar{a}_{i2}a_{21} + \cdots + \bar{a}_{in}a_{n1} = 0,\\
&\bar{a}_{i1}a_{12} + \bar{a}_{i2}a_{22} + \cdots + \bar{a}_{in}a_{n2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\bar{a}_{i1}a_{1i} + \bar{a}_{i2}a_{2i} + \cdots + \bar{a}_{in}a_{ni} = 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\bar{a}_{i1}a_{1n} + \bar{a}_{i2}a_{2n} + \cdots + \bar{a}_{in}a_{nn} = 0.
\end{aligned}$$

Сложив последние равенства, получим:

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} \Sigma_{k=1}^{n} a_{jk} = \Sigma_{j=1}^{n} \bar{a_{ij}} = 1.$$

Следовательно, матрица A^{-1} — полустохастическая.

Матрицу

$$A^{g} = (A + \Pi_A)^{-1} - \Pi_A, \tag{1}$$

где Π_1 — собственный проектор матричного оператора A, называют [9] обобщенной обратной.

Используя тот факт, что $A\Pi_A = \Pi_A = 0$, имеем:

$$\Sigma_{k=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{n} \pi_{ij} a_{jk} = \Sigma_{j=1}^{n} \pi_{ij} \Sigma_{k=1}^{n} a_{jk} = \Sigma_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 0,$$

то есть сумма элементов каждой строки матрицы Π_A равна нулю. Отсюда следует, что матрица (1) — полустохастическая.

Теорема 1. *Полугруппа S_n является полугруппой Клиффорда.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить [10, стр.125], что для произвольной матрицы $A \in S_n$ существуют решения уравнений

$$A^2 X = A, \quad Y A^2 = A$$

над полугруппой S_n. Действительно, в силу того, что для любой матрицы A [1]

$$A \cdot A^g = A^g \cdot A = E - \Pi_A,$$

имеем:

$$A^2 \cdot A^g = A(E - \Pi_A) = A,$$

$$A^g \cdot A^2 = (E - \Pi_A)A = A.$$

□

Теорема 2. *Каждый элемент полугруппы S_n порождает циклическую подгруппу $G_A = \{A^n | n \in \mathbb{Z}\}$, единицей которой является матрица $E - \Pi_A$, а элементом, обратным элементу A_n, — элемент $(A^g)^n$.*

Доказательство. Поскольку

$$A\Pi_A = \Pi_A A = A^g \Pi_A = \Pi_A A^g = 0,$$

то

$$A^n(E - \Pi_A) = (E - \Pi_A)A^n = A^n$$

для каждого $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, для $n \neq 0$

$$A^n \cdot (A^g)^n = A^{n-1} \cdot (AA^g)(A^g)^{n-1} = \cdots =$$

$$A^{n-1}(E - \Pi_A)(A^g)^{n-1} = \cdots = A \cdot A^g = E - \Pi_A.$$

Аналогично

$$(A^g)^n A^n = E - \Pi_A.$$

□

Пусть A — произвольная квадратная матрица n-го порядка над полем R.

Определение 3. *Матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 - \sum_{k=1}^n a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 - \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 - \sum_{k=1}^n a_{nk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

будем называть полустохастическим обрамлением *матрицы A.*

Очевидно, что множество матриц вида (2) относительно умножения образуют подполугруппу полугруппы S_{n+1}, причем эта полугруппа изоморфна полугруппе квадратных матриц n-го порядка. Более того, между матрицей n-го порядка и ее полустохастическим обрамлением имеется не только внешняя, но и глубокая внутренняя связь.

2. Графо-аналитические характеристики полустохастических матриц

Для дальнейшего исследования свойств элементов полугруппы S_n введем следующие характеристики полустохастических матриц.

Пусть $G = (X, \Gamma)$, где $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Gamma \subset X \times X$, ориентированный граф [11].

Определение 4. Нижней решеткой *k-той вершины графа G будем называть его подграф $g = (X, \gamma)$, у которого k-тая вершина является единственной нижней гранью относительно частичного порядка, порожденного отношением непосредственного следования, причем из каждой вершины i ($i \in X$, $i \neq k$) существует единственный одноразовый путь к вершине k.*

Определение 5. *Графом, порожденным квадратной матрицей A порядка n, или просто* графом матрицы A, *будем называть граф $G(A)=(X,\Gamma(A))$, где $X=\{1,2,\ldots,n\}$, $\Gamma(A)=\{(i,j)|i,\ j\in X,\ a_{ij}\neq 0\}$, а ненулевые элементы матрицы A — весами соответствующих дуг.*

Определение 6. Индексом (весом) *нижней решетки k-той вершины $g=(X,\gamma)$, где*

$$\gamma=\{(1,j_1),(2,j_2),\ldots,(k-1,j_{k-1}),(k+1,j_{k+1}),\ldots,(n,j_n)\},$$

графа $G(A)$ будем называть число

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{k-1,j_{k-1}}a_{k+1,j_{k+1}}\ldots a_{n,j_n}.$$

Сумму индексов всех нижних решеток k-той вершины будем называть индексом *этой вершины и обозначать $\mathcal{I}_k(A)$, а сумму индексов всех вершин графа $G(A)$* — индексом матрицы A *и обозначать $\mathcal{I}(A)$.*

Пусть $A\in S_n$, $G(A)$ — граф, порожденный матрицей A, а $\mathcal{I}_k(A)$ $(k=1,\ldots,n)$ — индекс k-той вершины этого графа, и пусть

$$I(A)=(\mathcal{I}_1(A),\mathcal{I}_2(A),\ldots,\mathcal{I}_n(A)),$$

причем существует k такой, что $\mathcal{I}_k(A)\neq 0$.

Теорема 7. *Вектор $I(A)$ является левым собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению 1.*

Доказательство. Достаточно доказать, что вектор $I(A)$ есть решение системы уравнений

$$xA=x, \tag{3}$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Возьмем k-тое уравнение системы (3)

$$x_1a_{1k}+x_2a_{2k}+\cdots+x_na_{nk}=x_k$$

и покажем, что имеет место равенство

$$\sum_{r=1}^{n}\mathcal{I}_r(a_{rk})=\mathcal{I}_k(A)$$

или

$$\sum_{r\neq k}\mathcal{I}_r(A)a_{rk}=\mathcal{I}_k(A)\sum_{r\neq k}a_{kr}. \tag{4}$$

Ради удобства, предположим, что $a_{ij}\neq 0$ $(i,j=1,\ldots,n)$. Тогда очевидно, что число слагаемых в (4) как слева, так и справа одинаково (равно $(n-1)n^{n-2}$).

Пусть

$$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\ldots a_{k-1,j_{k-1}}\cdot a_{k+1,j_{k+1}}\ldots a_{nj_n}\cdot a_{kj} \tag{5}$$

индекс нижней решетки k-той вершины $g = (X, \gamma)$, где

$$\gamma = \{(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (k-1, j_{k-1}), (k+1, j_{k+1}), \ldots, (n, j_n)\}.$$

Поскольку $j \neq k$, то на этой решетке существует одноразовый путь из вершины j к вершине k $\{(j, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_r, k)\}$. Если теперь в графе g убрать дугу (j, i_1), (i_1 может совпадать с k) и добавить дугу (k, j), то получим граф g', у которого вершина j является единственной нижней гранью относительно частичного порядка, порожденного отношением непосредственного следования, причем из каждой вершины $i \in X$ $(i \neq j)$ существует единственный одноразовый путь к вершине j, то есть g' является нижней решеткой j-той вершины. Ее индекс есть слагаемое в сумме $\mathcal{I}_j(A)$. Если это слагаемое умножить на a_{ji_1}, то получим (5). Таким образом, каждому слагаемому левой части равенства (2) соответствует тождественно равное слагаемое в правой части равенства (4). Аналогично в другую сторону. Следовательно равенство (4) имеет место. Если $a_{ij} = 0$, то слагаемые, в состав которых входит множитель a_{ij} (как слева, так и справа) будут отсутствовать. Теорема доказана. □

Теорема 8. *Для полустохастической матрицы A индекс k-той вершины $(k = 1, \ldots, n)$ равен главному минору $n-1$-го порядка, полученного вычеркиванием k-й строки и k-го столбца матрицы $E - A$.*

Доказательство. Не теряя общности, доказательство проведем для случая $k = n$, то есть докажем, что

$$\mathcal{I}_n(A) = \begin{vmatrix} \sum_{k\neq 1}^{n-1} a_{1k} + a_{1n} & -a_{12} & \ldots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & \sum_{k\neq 2}^{n-1} a_{2k} + a_{2n} & \ldots & -a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-1,k} + a_{n-1,n} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

каждый столбец определителя (6) представим в виде двух столбцов

$$(-a_{1k} - a_{2k} \cdots - a_{k-1,k} \sum_{i\neq k}^{n-1} a_{ki} - a_{k+1,k} \cdots - a_{n-1,k})^t$$

(k-тый столбец первого типа),

$$(00\ldots 0a_{kn}0\ldots 0)^t$$

(k-тый столбец второго типа). В силу линейности определитель (6) представим в виде

$$\Delta_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1} \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k),$$

где Δ_0 — определитель, столбцами которого являются столбцы второго типа, $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — определитель, у которого $i_1, i_2, \ldots, i_k$ столбцами являются соответствующие столбцы первого типа, а остальные есть соответствующие столбцы второго типа.

Определитель $\Delta_0 = a_{1n}a_{2n}\dots a_{n-1n}$ есть индекс нижней решетки n-вершины, у которой все вершины смежные с вершиной n. Определитель

$$\Delta(i) = \sum_{k\neq i}^{n-1} a_{ik}(a_{1n}\dots a_{i-1,n}a_{i+1,n}\dots a_{n-1,n})$$

является суммой индексов всех нижних решёток n-ой вершины, у которой вершины $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ смежные с вершиной n, а вершина i смежна с одной из указанных вершин. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n-1}\Delta(i)$ есть сумма индексов n-ой вершины, у которой ровно $n-2$ вершин смежных с вершиной n. Определитель

$$\Delta(i,j) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k\neq i}^{n-1} a_{ik} & -a_{ij} \\ -a_{ji} & \sum\limits_{k\neq j,i}^{n-1} a_{jk} \end{vmatrix} \prod_{s\neq j,i}^{n-1} a_{sn} = \left(\sum_{k\neq i,j}^{n-1} a_{ik}\sum_{k\neq j,i}^{n-1} a_{jk}\right)\prod_{s\neq j,i}^{n-1} a_{sn}$$

есть сумма индексов всех нижних решёток n-ой вершины, у которой все вершины кроме i-ой и j-ой смежные с вершиной n. И, вообще, выполнив процедуру расщепления на соответствующие определители минора

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$$

$(k = 3, 4, \dots, n-2)$ определителя $\Delta(i_1, i_2, \dots, i_n)$, получим сумму индексов всех нижних решёток n-ой вершины, у которых все вершины из множества $X\setminus\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ смежные с вершинами n. И, наконец, $\Delta(1, 2, \dots, n-1)=0$. Таким образом, равенство (6) доказано. □

3. Решение некоторых задач

Уже эти результаты (дальнейшее их развитие будет изложено в следующей работе) позволяют дать новые решения некоторых задач алгебры.

1. Из теоремы 8 следует, что определитель произвольной матрицы B можно вычислять по формуле

$$|B| = \mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{E-B}).$$

2. Пусть B — произвольная матрица такая, что $(E-B)^{-1}$ существует. Тогда очевидно, что матрица $(E-B)^{-1}$ есть единственное решение матричного уравнения

$$X = E + BX. \tag{7}$$

Покажем, что решение уравнения (7) можно записать в виде

$$X = \frac{1}{\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B})}\left(\frac{1}{\widetilde{b}_{n+1,i}}\mathcal{I}_j^{(n+1,i)}(\widetilde{B})\right),\ i,j = 1, \cdot, n, \tag{8}$$

где $\widetilde{B}$ полустохастическое обрамление матрицы B, которое отличается от (2) тем, что в (2) $n+1$-я строка имеет вид $(00\ldots01)$, а в матрице $\widetilde{B}$ в $n+1$-ой строке

$$(\widetilde{b}_{n+1,1}\ \widetilde{b}_{n+1,2}\ \ldots\ \widetilde{b}_{n+1,n}\ \widetilde{b}_{n+1,n+1}) \quad b_{n+1,k} \neq 0$$

для $k = 1, \ldots, n$, $\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B})$ — индекс $n+1$-ой вершины графа матрицы $\widetilde{B}$, $\mathcal{I}_j^{(n+1,i)}(\widetilde{B})$ — сумма индексов нижних решёток j-ой вершины, каждая из которых содержит дугу $(n+1, i)$.

Поскольку по условию матрица $E - B$ обратима, а по теореме 8

$$\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B}) = |E - B|,$$

то $\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B}) \neq 0$.

Покажем, что (8) удовлетворяет уравнение (7), то есть имеют место равенства

$$\frac{1}{\widetilde{b}_{n+1,i}}\mathcal{I}_i^{n+1,i}(\widetilde{B}) = \mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_i^{n+1,k}(\widetilde{B})$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{1}{\widetilde{b}_{n+1,i}}\mathcal{I}_j^{n+1,i}(\widetilde{B}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_j^{n+1,k}(\widetilde{B})$$

для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, или, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n+1}\widetilde{b}_{ik} = 1,$$

равенства

$$\sum_{k\neq i}^{n+1}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_i^{n+1,k}(\widetilde{B}) = \mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B}) + \sum_{k\neq i}^{n}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_i^{n+1,k}(\widetilde{B}), \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_j^{n+1,k}(\widetilde{B}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}}\mathcal{I}_j^{n+1,k}(\widetilde{B}), \tag{10}$$

Возьмём из суммы, стоящей слева в (9), слагаемое

$$\frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,i}}\mathcal{I}_i^{n+1,i}(\widetilde{B}).$$

Каждое слагаемое последней суммы есть индекс нижней решётки i-ой вершины, которая содержит дугу $(n+1, i)$, умноженный на $\widetilde{b}_{ik}$ и делённый на $\widetilde{b}_{n+1,i}$. Если в нижней решётке i-ой вершины из каждой вершины $r \neq i$ можно прийти к вершине i через вершину $n+1$, то, исключив дугу $(n+1, i)$ и добавив дугу (i, k), получим нижнюю решётку $n+1$-ой вершины. Таким образом, каждому слагаемому такого типа в сумме, стоящей в (9) слева, соответствует слагаемое в сумме $\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B})$. Пусть нижняя решётка i-ой вершины, содержащая дугу $(n+1, i)$, такова, что к вершине i можно прийти не только через вершину $n+1$. Обозначим через S' множество вершин графа $G(\widetilde{B})$, из которых можно прийти к вершине i через вершину $n+1$, а через S'' множество тех вершин, из которых можно прийти к вершине i и другим путём. Если $k \in S'$, то, исключив дугу $(n+1, i)$ и прибавив дугу (i, k), имеем нижнюю решётку $n+1$-ой вершины, а индексу такой решётки соответствует слагаемое в сумме $\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{B})$. Если же $k \in S''$, то среди нижних решёток i-ой вершины найдутся такие, что у них переходы в множествах S' и S'' совпадают, но первая содержит дугу $(n+1, i)$, а вторая — дугу $(n+1, k)$. Разделив их индексы на $\widetilde{b}_{n+1,i}$ и $\widetilde{b}_{n+1,k}$ соответственно и умножив оба на $\widetilde{b}_{i,k}$, имеем, что слагаемому такого типа из суммы, стоящей в (9) слева, соответствует тождественно равное слагаемое в сумме

$$\sum_{k \neq i}^{n} \frac{\widetilde{b}_{ik}}{\widetilde{b}_{n+1,k}} \mathcal{I}_i^{n+1,k}(\widetilde{B}).$$

Точно так же, анализируя переходы на графе $G(\widetilde{B})$, можно показать, что разным слагаемым суммы, стоящей в (9) слева, соответствуют разные слагаемые суммы, стоящей в (8). Равенство (10) доказывается аналогично.

Из доказанного следует, что если матрица B — неособенная, то

$$B^{-1} = \frac{1}{\mathcal{I}_{n+1}(\widetilde{E-B})} \left(\frac{1}{\widetilde{b}_{n+1,i}} \mathcal{I}_j^{(n+1,i)}(\widetilde{E-B}) \right),\ i,j = 1, \cdot, n,$$

Действительно, если матрицу B представить в виде $B = E - (E - B)$, то очевидно, что B^{-1} есть решение уравнения

$$X = E + (E - B)X.$$

3. Пусть определитель неоднородной системы

$$Ax = c \tag{11}$$

не равен нулю, и пусть, для определённости $c_n \neq 0$. От системы (11) перейдём к эквивалентной ей системе

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1,1}x_1 + b_{n-1,2}x_2 + \cdots + b_{n-1,n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = c_n. \end{cases} \tag{12}$$

По системе (12) построим однородную систему

$$Bx = 0, \tag{13}$$

где у матрицы B первые $n-1$ строк такие же, как у матрицы системы (12), а

$$b_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Систему (13) перепишем в виде

$$(B+E)x = x. \tag{14}$$

Очевидно, что матрица $B_0 = (B+E)^{-1}$ — полустохастическая, а вектор $(\mathcal{I}_1(B_0), \mathcal{I}_2(B_0), \ldots, \mathcal{I}_n(B_0))$ решение системы (14). Если индекс системы (11)

$$\mathcal{I}^*(B_0) := \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\mathcal{I}_j(B_0) \neq 0,$$

то

$$x_k = \frac{\bar{\bar{c}}_n \mathcal{I}_k(B_0)}{\mathcal{I}^*(B_0)},\ k = 1, \ldots, n,$$

является решением системы (11).

4. Пусть матрица Π — идемпотентна, сумма элементов каждой её строки равна нулю и индекс $\mathcal{I}(E-\Pi) \neq 0$. Построим полустохастическую матрицу A с собственным проектором Π. Рассмотрим уравнение

$$X(E-\Pi) = X. \tag{15}$$

Каждая строка матрицы X есть собственный вектор, соответствующий собственному значению 1, матрицы $E-\Pi$, и в силу того, что её индекс не равен нулю, одним из таких векторов есть вектор

$$(\mathcal{I}_1(E-\Pi), \mathcal{I}_2(E-\Pi), \ldots, \mathcal{I}_n(E-\Pi)),$$

а, следовательно, и вектор

$$\mathcal{I}^{-1}(E-\Pi)\,(\mathcal{I}_1(E-\Pi), \mathcal{I}_2(E-\Pi), \ldots, \mathcal{I}_n(E-\Pi)). \tag{16}$$

Построим матрицу A, строками которой являются компоненты вектора (16). Эта полустохастическая матрица является решением уравнения (15), то есть

$$A(E-\Pi) = A. \tag{17}$$

Поскольку все строки матрицы A одинаковы, а сумма элементов каждой строки матрицы Π равна нулю, то ΠA есть нуль-матрица. Кроме того из равенства (17) следует, что

$$A\Pi = A(E-\Pi)\Pi = AE\Pi - A\Pi^2 = A\Pi - A\Pi = O.$$

Равенства $\Pi^2 = \Pi$, $A\Pi = \Pi A = O$ как раз свидетельствуют о том, что Π — собственный проектор матрицы A.

Abstract. В настоящей работе графо-аналитическими методами исследуются свойства естественного обобщения стохастических матриц, названных полустохастическими. Показано, что с помощью разработанного инструментария решаются некоторые классические задачи алгебры.

In this paper properties of reasonable generalization of the stochastic matrices, the so-called semi-stochastic, are investigated by methods of graphs. It is shown that some classic problems of algebra can be solved with developed instruments.

Литература

[1] Р.Беллман, *Введение в теорию матриц,* М.: Наука, 1969.

[2] Ф.Р.Гантмахер, *Теория матриц,* М.: Наука, 1966.

[3] В.И.Романовский, *Дискретные цепи Маркова,* М.: Гостехиздат, 1948.

[4] Д.Кемени, Д.Снелл, *Конечные цепи Маркова,* М.: Наука, 1970.

[5] В.С.Королюк, А.А.Томусяк, *Вычисление эргодического распределения марковских и полумарковских процессов,* Кибернетика, N 1 1969, 68–71.

[6] V.V.Kirichenko, L.Z.Maschenko, T.L.Shemotyuk, T.I.Tsypiy, *Non-negative matrices and oriented graphs,* Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена пам'яті професора Л.М.Глускіна, К.:1997, с.101.

[7] Л.А.Вотякова, *Напівстохастичні матриці, їх властивості і застосування,* Матеріали 6-ї міжнародної конференції імені академіка М.Кравчука, К.: 1997, с.85

[8] L.A.Votjakova, A.A.Tomusjak, *On some Clifford's semi-groups,* Друга міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена пам'яті професора Л.А.Калужніна, Вінниця, 1999, с.50.

[9] В.С.Королюк, А.Ф.Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения,* Киев: Наукова думка, 1976.

[10] В.А.Артамонов и др., *Общая алгебра,* т.2, М.: Наука, 1991.

[11] О.Оре, *Теория графов,* М: Наука. 1980.

Винницкий государственный
педагогический университет
им. М.Коцюбинского
email: vspun@sovamua.com

Поступило 20.03.2001