Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 54H11, 54G05, 22A05

О неразложимых топологических группах

Е.Г.Зеленюк

Топологическое пространство называется *неразложимым* (ω-неразложимым), если его нельзя разбить на два (на ω) плотных подмножества. Все пространства предполагаются хаусдорфовыми. В [1] в предположении аксиомы Мартина на счётной булевой группе была построена групповая топология с единственным сходящимся к нулю неглавным ультрафильтром. Она, очевидно, неразложима. В [2] было доказано, что на абелевой группе с конечным числом элементов порядка 2 не существует недискретных неразложимых групповых топологий. Эта теорема получила дальнейшее развитие. В частности, были получены следующие результаты. Каждая недискретная ω-неразложимая топологическая абелева группа содержит открытую счётную булеву подгруппу [3,4]. *Булевой* называется группа экспоненты 2. Существование недискретной ω-неразложимой топологической абелевой группы влечет существование P-точки в $\mathbb{N}^*$ и, следовательно, не зависит от системы ZFC обычных аксиом теории множеств [5]. Каждая счётная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 абсолютно ω-разложима [4]. Группа называется *абсолютно разложимой* (*абсолютно ω-разложимой*), если её можно разбить на два (на ω) подмножества, плотных в любой недискретной групповой топологии. Каждая абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 абсолютно разложима [6].

Данная статья содержит два основных результата. Первый: каждая счётная недискретная ω-неразложимая топологическая группа содержит открытую булеву подгруппу. Следовательно, существование любой счётной недискретной ω-неразложимой топологической группы влечёт существование P-точки в $\mathbb{N}^*$. И второй: каждая счётная группа с конечным числом элементов порядка 2, вложимая в компактную топологическую группу, абсолютно ω-разложима. Оба результата получены единым методом, развивающим подход из [4], который в свою очередь возник в [7].

Группа, снабжённая топологией с непрерывными левыми сдвигами, называется *левотопологической*. Топологическое пространство X с частичной операцией $\cdot$ (умножением) и выделенным элементом 1 (единицей) называется *локальной левотопологической группой*, если каждому элементу $x \in X$ можно сопоставить открытую окрестность единицы U_x так, что

(1) для любого $y \in U_x$ произведение $x \cdot y$ определено, $x \cdot 1 = x$, $x \cdot U_x$ — открытая окрестность x и отображение $U_x \ni y \mapsto x \cdot y \in x \cdot U_x$ — гомеоморфизм;

(2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, если $y \in U_x$, $x \in U_{x \cdot y} \cap U_y$, $y \cdot z \in U_x$. Всюду далее для локальной левотопологической группы запись $x \cdot y$ предполагает, что $y \in U_x$, а запись $x \cdot U$, где U — окрестность 1, предполагает, что $U \subseteq U_x$. Основной пример локальной левотопологической группы — открытая окрестность единицы левотопологической группы.

Пусть X, Y — локальные левотопологические группы. Отображение $f : X \to Y$ называется *локальным изоморфизмом*, если f — биекция, $f(1_x) = 1_y$ и для каждого неединичного $x \in X$ найдётся окрестность единицы V_x такая, что $f(xy) = f(x)f(y)$ для любого $y \in V_x$. Топологический локальный изоморфизм локальной левотопологической группы на себя называется *локальным автоморфизмом*. Локальный автоморфизм называется *тривиальным*, если он тождественен на некоторой окрестности единицы. Будем говорить, что биекция f на множестве X имеет конечный порядок n, если $f^n = id_x$ и n — наименьшее натуральное число ≥ 1 с таким свойством.

Булевой частью группы G называется подмножество

$$B(G) = \{x \in G : x^2 = 1\}.$$

Булева часть $B(G)$, вообще говоря, не является подгруппой. Однако это так, если G абелева. Более общо, пусть $A \subseteq B(G)$ и пусть $xy = yx$ для любых $x, y \in A$. Тогда подгруппа, порождённая A, содержится в $B(G)$. Действительно, для любых $x_1, \dots, x_n \in A$ $(x_1 \cdots x_n)^2 = x_1^2 \cdots x_n^2 = 1$.

Примеры. (1) Пусть τ — топология на G с непрерывными сдвигами. Очевидно, для каждого $a \in G$ a-сопряжение $x \mapsto a^{-1}xa$ — локальный автоморфизм на (G, τ). Он тривиален тогда и только тогда, когда централизатор элемента a открыт. Если a имеет порядок n, то a-сопряжение имеет порядок $\leq n$.

(2) Пусть G — абелева группа, τ — топология на G с непрерывными сдвигами и обращением. Очевидно, обращение — локальный автоморфизм на (G, τ) порядка ≤ 2. Этот локальный автоморфизм тривиален тогда и только тогда, когда $B(G)$ — окрестность единицы (G, τ) или, что равносильно, в (G, τ) существует открытая булева подгруппа.

(3) Пусть τ — топология на G с непрерывными сдвигами и обращением. В общем случае обращение не является локальным автоморфизмом. Однако это так, если каждое сопряжение на (G, τ) тривиально. Действительно, для каждого $a \in G$ найдётся окрестность единицы U такая, что $ax = xa$ для любого $x \in U$, откуда $x^{-1}a^{-1} = a^{-1}x^{-1}$ и, значит, $(ax)^{-1} = x^{-1}a^{-1} = a^{-1}x^{-1}$. Обращение тривиально тогда и только тогда, когда $B(G)$ — окрестность единицы (G, τ). В случае, когда топология τ групповая, это равносильно наличию в (G, τ) открытой булевой подгруппы. В самом деле, выберем окрестность единицы U такую, что $U^2 \subseteq B(G)$. Тогда для любых $x, y \in U$ $(xy)^2 = 1$ и $xyyx = 1$, откуда $xy = yx$. Но тогда подгруппа, порождённая U, содержится в $B(G)$. □

Пусть f — биекция на множестве X. Для каждого $x \in X$ через $O(f, x)$ или $O(x)$ обозначается f-орбита элемента x — подмножество $\{f^n(x) : n < \omega\}$. Если $|O(x)| = \omega$, то $f^n(x) \neq f^m(x)$ для любых различных $n, m < \omega$. Если же $|O(x)| = n$, то $f^n(x) = x$. Подмножество $Y \subseteq X$ называется f-инвариантным, если $f(Y) \subseteq Y$.

Лемма 1. Пусть X — пространство, f — гомеоморфизм на X, $x \in X$, $f(x) = x$, U — окрестность x. Если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|O(f, y)| \leq n$ для любого $y \in U$, то существует открытая f-инвариантная окрестность $V \subseteq U$ точки x. Если X нульмерно, то V можно выбрать открыто-замкнутой.

Доказательство. Выберем открытую окрестность W точки x такую, что $f^j(W) \subseteq U$, $j = 0, \dots, n-1$ и положим $V = \cup_{j=0}^{n-1} f^j(W)$. □

Пусть теперь X — пространство с выделенным элементом 1, f — гомеоморфизм на X такой, что $f(1) = 1$. *Спектром* f (*спектром* f на подмножестве $Y \subseteq X$) называется множество

$$spec(f) = \{|O(f, x)| : 1 \neq x \in X\} \ (spec(f, Y) = \{|O(f, x)| : 1 \neq x \in Y\}).$$

Окрестность U точки x называется *спектрально минимальной*, если $spec(f, U) = spec(f, V)$ для любой окрестности $V \subseteq U$ точки x. *Минимальным спектром* f называется множество $\min spec(f) = spec(f, U)$, где U — спектрально минимальная окрестность единицы. Если X — спектрально минимальная окрестность 1, то f называется *стабильным*. Из леммы 1 вытекает

Предложение. Пусть (X,τ) — локальная левотопологическая группа, f — локальный автоморфизм на (X,τ). Тогда справедливо одно из двух взаимоисключающих утверждений:

(1) для любой окрестности единицы U и для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $x \in U$ такой, что $|O(f,x)| > n$;

(2) существует открытая f-инвариантная окрестность единицы U такая, что $f|_U$ — стабильный локальный автоморфизм на U конечного порядка.

Лемма 2. Пусть X — локальная левотопологическая группа, f — локальный автоморфизм на X конечного порядка, $1 \neq x \in X$, $|O(x)| = s$, U — спектрально минимальная окрестность x. Тогда

$$spec(f,U) = \{HOK(s,t) : t \in \{1\} \cup \min spec(f)\}.$$

Доказательство. Пусть n — порядок f. Выберем окрестность единицы V такую, что

1) $f^j(xy) = f^j(x)f^j(y)$, $j = 1,\ldots,n-1$, $y \in V$;

2) семейство подмножеств $f^i(x)V$, $i = 0,\ldots,s-1$, дизъюнктно.

А затем выберем окрестность единицы W такую, что $f^j(W) \subseteq V$, $j = 0,\ldots,n-1$. Пусть $y \in W$, $|O(y)| = t$, $k = HOK(s,t)$. Убедимся, что $|O(xy)| = k$. Действительно, $f^k(xy) = f^k(x)f^k(y) = xy$. Далее, если $f^j(xy) = xy$, то $f^j(x)f^j(y) = xy$, откуда $f^j(x) = x$, а затем и $f^j(y) = y$. Значит, $s|j$ и $t|j$. □

Следствие. Пусть X — локальная левотопологическая группа, f — стабильный локальный автоморфизм на X конечного порядка. Тогда $spec(f)$ — конечное подмножество в $\mathbb{N}$, замкнутое относительно HOK.

Пример. Пусть σ — произвольное конечное подмножество в $\mathbb{N}$, замкнутое относительно HOK, $\sigma = \{s_1,\ldots,s_k\}$, $s_1 < \ldots < s_k$, $m = s_1 + \ldots + s_k + 1$, $\oplus_\omega \mathbb{Z}(m)$ — прямая сумма ω копий $\mathbb{Z}(m)$, снабжённая топологией прямой суммы. Рассмотрим на локальной левотопологической группе $\oplus_\omega \mathbb{Z}(m)$ покоординатную подстановку g, индуцированную подстановкой на $\mathbb{Z}(m)$, которая в свою очередь задана произведением независимых циклов

$$(1,\ldots,s_1)(s_1+,\ldots,s_2)\cdots(s_1+\ldots+s_{k-1}+1,\ldots,s_1+\ldots+s_k).$$

Очевидно, g — гомеоморфизм, $g(0) = 0$, $spec(g,U) = \sigma$ для любой окрестности нуля U и $g(x+y) = g(x) + g(y)$, если $r(x) < l(y)$. Через r,l обозначаются отображения, сопоставляющие каждому ненулевому элементу из $\oplus_\omega \mathbb{Z}(m)$ номера первой и последней ненулевой координаты. Следовательно, g — стабильный локальный автоморфизм на $\oplus_\omega \mathbb{Z}(m)$ спектра σ. Он называется *стандартным*. □

Следующие три теоремы мы приводим без доказательств. Первые две из них обобщают соответствующие результаты из [4]. Вторая теорема выводится из первой.

Теорема о локальном автоморфизме. Пусть X — счётная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа, f — стабильный локальный автоморфизм на X конечного порядка, $\sigma = spec(f)$, $m = 1 + \sum_{s\in\sigma} s$; g — стандартный локальный автоморфизм на $\oplus\mathbb{Z}(m)$ спектра σ. Тогда существует непрерывный локальный изоморфизм $h : X \to \oplus_\omega \mathbb{Z}(m)$ такой, что

1) $f = h^{-1} \circ g \circ h$;

2) $h(xy) = h(x) + h(y)$, если $r(h(x)) + 1 < l(h(y))$.

Если X со счётной базой, то h дополнительно можно выбрать топологическим.

Теорема о разложении. Пусть (X, τ_0) — счётная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа, f — нетривиальный стабильный локальный автоморфизм на (X, τ_0) конечного порядка, s — наименьшее число из $spec(f) \setminus \{1\}$. Тогда X можно разбить на счётное число подмножеств, плотных в любой недискретной топологии τ на X такой, что

(1) (X, τ) — локальная левотопологическая группа;

(2) f — гомеоморфизм на (X, τ);

(3) $s \in spec(f, U \cap V)$ для любых окрестностей единицы U, V в топологиях.

Следствие 1. Если на счётной недискретной регулярной локальной левотопологической группе существует нетривиальный локальный автоморфизм конечного порядка, то она ω-разложима.

Следствие 2. В счётной группе, снабжённой недискретной ω-неразложимой регулярной топологией с непрерывными сдвигами, централизатор каждого элемента конечного порядка открыт.

Теорема об автоморфизации обращения. Пусть G — счётная группа, $B = B(G) \setminus \{1\}$, τ_0 — недискретная регулярная топология на G с непрерывными сдвигами и обращением, X — открытая симметричная окрестность единицы (G, τ_0), удовлетворяющая одному из следующих условий:

(1) $X \cap B = \emptyset$;

(2) $1 \in cl(B)$ и в X централизатор каждого элемента из B открыт.

Тогда на X существует частичная операция $+$ такая, что для любой топологии $\tau_0 \subseteq \tau$ на G с непрерывными сдвигами и обращением $X_\tau = (X, \tau|_X, +, 1)$ — локальная левотопологическая группа, а обращение на X_τ — локальный автоморфизм.

Теорема 1. Пусть G — счётная группа, снабжённая ω-неразложимой регулярной топологией с непрерывными сдвигами и обращением. Тогда $B(G)$ — окрестность единицы G.

Доказательство. Пусть $B = B(G) \setminus \{1\}$. По следствию 2, централизатор каждого элемента из B открыт в G. Если $1 \in cl(B)$, то положим $X = G$, в противном случае в качестве X выберем открытую симметричную окрестность единицы G, дизъюнктную с B. По теореме об автоморфизации обращения на X существует частичная операция $+$ такая, что $(X, +, 1)$ — локальная левотопологическая группа, а обращение на ней — локальный автоморфизм. По следствию 1, он тривиален. Значит, $B(G)$ — окрестность единицы G. □

Следствие. Каждая счётная недискретная ω-неразложимая топологическая группа содержит открытую булеву подгруппу.

Замечание. Каждое неразложимое пространство, очевидно, ω-неразложимо. Достаточным признаком ω-неразложимости пространства является наличие в нём точки, к которой сходится лишь конечное число ультрафильтров. В предположении MA на счётной булевой группе для каждого натурального $n > 1$ существуют две групповые топологии с ровно n сходящимися к нулю неглавными ультрафильтрами, одна из которых неразложима, а другая разложима [8].

Теорема 2. Пусть G — счётная группа с конечной булевой частью, вложимая в компактную топологическую группу. Тогда G можно разбить на счётное число подмножеств, плотных в любой недискретной топологии с непрерывными сдвигами и обращением.

Доказательство. Пусть τ_0 — предкомпактная групповая топология на G, $B = B(G) \setminus \{1\}$, $X = G \setminus B$, $+$ — частичная операция на X, предоставляемая теоремой об автоморфизации, $\{X_n : n < \omega\}$ — разбиение локальной левотопологической группы $(X, \tau_0|_X, +, 1)$ по обращению, предоставляемое теоремой о разложении. Убедимся, что каждое X_n плотно в любой недискретной топологии τ на G с непрерывными сдвигами и обращением. Пусть τ_1 — верхняя грань топологий τ_0, τ. Очевидно, сдвиги и обращение в ней непрерывны. Окрестностями единицы в топологии τ_1 являются подмножества вида $U \cap V$, где U, V — окрестности единицы в топологиях τ_0, τ. Так как τ_0 предкомпактна, то tau_1 недискретна (см., например, в [6]). Имеем $\tau_0 \subseteq \tau_1$, $X_{\tau_1} = (X, \tau_1|_X, +, 1)$ — недискретная локальная левотопологическая группа, а обращение на X_{τ_1} — локальный автоморфизм. Значит, X_n плотно в X_{τ_1}, а значит, X_n плотно и в (G, τ). □

Следствие. Каждая счётная группа с конечной булевой частью, вложимая в компактную топологическую группу, абсолютно ω-разложима.

Abstract. A topological group is called irresolvable, if it can not be partitioned into two dense subsets. It is proved, that every countable nondiscrete irresolvable topological group contains an open Boolean subgroup.

Литература

[1] В.И.Малыхин, *Экстремально несвязные и близкие к ним группы,* ДАН СССР. 1975. Т.220. №1. С.27–30.

[2] W.W.Comfort, van Mill J., *Groups with only resolvable group topologies,* Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V.120. №3. P.687–696.

[3] И.В.Протасов, *Разбиения прямых произведений групп,* Укр. матем. ж. 1997. Т.49. №10. С.1389–1395.

[4] Е.Г.Зеленюк, *Разложимость топологических групп,* Укр. матем. ж. 1999. Т.51. №1. С.41–47.

[5] И.В.Протасов, *Неразложимые топологии на группах,* Укр. матем. ж. 1998. Т.50. №12. С.1646–1655.

[6] Е.Г.Зеленюк, *Разбиения групп на абсолютно плотные подмножества,* Матем. заметки. 2000. Т.67. №5. С.706–711.

[7] Е.Г.Зеленюк, *Конечные группы в тривиальны,* Киев. 1996. 12 с. (Препр. НАН Украины. Ин-т математики, 96.3).

[8] Е.Г.Зеленюк, *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров*, Матем. студ?ї. 1996. Т.6. С.41–52.

Институт прикладных проблем
механики и математики
НАН Украины, Львов

Поступило 20.03.2001