Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 16P140, 16G10

# Колчаны и индексы полумаксимальных колец

Т.И.Цюпий

Статья посвящена изучению колчанов полумаксимальных колец, т.е. нетеровых полусовершенных полудистрибутивных и полупервичных колец. Такие кольца являются прямыми произведениями так называемых "черепичных порядков"(tiled orders) над дискретно нормированными кольцами.

Мы будем использовать терминологию и результаты монографии [1], в которой колчанные методы систематически применяются в структурной теории колец.

Понятие индекса нетерова полусовершенного кольца предложено В. В. Кириченко. Отметим, что индекс черепичного порядка не превосходит числа вершин в его колчане.

## 1. Предварительные сведения

Все рассматриваемые в статье кольца ассоциативны с $1 \neq 0$, все модули правые и унитарные.

Пусть $R$ — радикал Джекобсона кольца $A$. Кольцо $A$ называется полусовершенным, если фактор-кольцо $A/R$ является артиновым и идемпотенты можно поднимать по модулю $R$ [2].

Напомним, что идемпотент $e$ кольца $A$ называется локальным, если кольцо $eAe$ локально.

Следующая теорема принадлежит Б. Мюллеру (см.напр. [1], с.184).

**Теорема 1.1.** *Кольцо $A$ полусовершенно тогда и только тогда, когда $1 \in A$ является суммой попарно ортогональных локальных идемпотентов.*

Обозначим через $M_n(D)$ кольцо всех квадратных матриц порядка $n$ с коэффициентами из тела $D$.

Полусовершенное полупервичное нетерово справа кольцо $A$ называется полумаксимальным, если для каждого локального идемпотента $e$ кольца $A$ кольцо $eAe$ является дискретно нормированным (не обязательно коммутативным) [3].

**Теорема 1.2** [3]. *Каждое полумаксимальное кольцо изоморфно конечному прямому произведению первичных колец вида*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

*где $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо с простым элементом $\pi$, $\alpha_{ij}$ - целые и $\alpha_{ij}+\alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всех $i, j, k$, $\alpha_{ii} = 0$ для всех $i$ (эти соотношения называются кольцевыми неравенствами).*

Кольцо $\Lambda$ вида (1) с классическим кольцом частных $Q = M_n(D)$ будем записывать с помощью матрицы показателей $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ и дискретно нормированного кольца $\mathcal{O}$ с телом частных $D$:

$$\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}.$$

Кольца вида (1) называются черепичными порядками (tiled orders). Отметим, что черепичные порядки рассматривались, например, в [4].

Напомним, что модуль $M$ называется дистрибутивным, если для произвольных его подмодулей $K, L, N$ справедливо равенство $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

**Теорема 1.3** [5]. *Модуль является дистрибутивным тогда и только тогда, когда каждый его фактормодуль имеет в своем цоколе не больше одного экземпляра произвольного простого модуля.*

Очевидно, что произвольные подмодуль и фактормодуль дистрибутивного модуля являются дистрибутивными. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным модулем. Кольцо называется полудистрибутивным справа (слева), если регулярный модуль $A_A$ (левый регулярный модуль $_AA$) является полудистрибутивным модулем. Полудистрибутивное справа и слева кольцо называется полудистрибутивным. Полусовершенные полудистрибутивные кольца, следуя [6], будем называть $SPSD$-кольцами.

Каждое полумаксимальное кольцо является нетеровым с двух сторон полусовершенным полудистрибутивным кольцом. Полусовершенное кольцо $A$ называется приведенным, если фактор-кольцо $A/R$ является прямым произведением тел. Известно, что каждое полусовершенное кольцо $A$ эквивалентно в смысле Мориты приведенному кольцу. Черепичный порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ является приведенным тогда и только тогда, когда матрица $(\alpha_{ij})$ не имеет симметричных нулей.

**Теорема 1.4** [6]. *Следующие условия эквивалентны для полусовершенного полупервичного нетерова справа кольца $A$:*

*(a) кольцо $A$ полудистрибутивно;*

*(b) кольцо $A$ есть прямая сумма полупростого артинового кольца и полумаксимального кольца.*

Черепичный порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ называется $(0,1)$-порядком, если $0 \le \alpha_{ij} \le 1$ [3]. По каждому приведенному $(0,1)$-порядку строится частично упорядоченное множество $S = \{1, 2, ..., n\}$, причем $i \le j$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{ij} = 0$ [3]. Наоборот, если есть конечное частично упорядоченное множество $S = \{1, 2, ..., n\}$ и дискретно нормированное кольцо $\mathcal{O}$, то можно построить $(0,1)$-порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, где $\alpha_{ij} = 0$ для $i \le j$ и $\alpha_{ij} = 1$ в других случаях. Определение диаграммы конечного частично упорядоченного множества см. в ([1], с.233).

**Теорема 1.5**. *Колчан $Q(\Lambda)$ приведенного $(0,1)$-порядка $\Lambda$ может быть получен из диаграммы конечного частично упорядоченного множества добавлением всех стрелок, которые начинаются во всех максимальных элементах $S$ и заканчиваются во всех минимальных элементах $S$.*

**Замечание1**. *Утверждение теоремы 1.5 содержит метод построения сильно связного колчана исходя из диаграммы конечного частично упорядоченного множества.*

## 2. Индекс нетерова полусовершенного кольца

Приведем необходимые сведения о колчанах и перестановочно неприводимых матрицах, которые содержатся в [1, гл.VII, §7.7].

Следуя Габриелю, конечный ориентированный граф будем называть колчаном.

Пусть точки $1, \dots, s$ являются вершинами колчана $Q$, и между точками $i$ и $j$ есть $t_{ij}$ стрелок. Обозначим через $[Q]$ матрицу смежности колчана $Q$:

$$[Q] = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{s1} & t_{s2} & \dots & t_{ss} \end{pmatrix}.$$

Колчан называется сильно связным, если из любой одной его вершины до другой существует путь или он состоит из одной вершины. Колчан, не содержащий ориентированных циклов, называется ацикличным.

**Предложение 2.1** [1, §7.7]. *Колчан $Q$ сильно связен тогда и только тогда, когда матрица $[Q]$ является перестановочно неприводимой.*

Пусть $A$ — нетерово справа полусовершенное кольцо, $Q(A)$ — его колчан, $[Q(A)]$ — матрица смежности $Q(A)$ [1, §7.1].

Матрица $[Q(A)]$ является неотрицательной матрицей.

Справедливо следующее предложение ([1], предложение 7.7.4).

**Предложение 2.2** *Пусть $Q$ — колчан с матрицей смежности $[Q]$. Тогда существует перестановочная матрица $P$ такая, что*

$$P^T[Q]P = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ 0 & B_2 & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_t \end{pmatrix},$$

*где квадратные матрицы $B_1, B_2, \dots, B_t$ перестановочно неприводимы.*

Отметим, что перестановочно неприводимые матрицы — это в точности неразложимые матрицы в терминологии [7, гл.XIII].

По теореме Фробениуса [7, гл.XIII], из предложения 2.1 следует, что матрица $[Q]$ имеет максимальное действительное собственное число $r$, т.е. если $\lambda$ — произвольное собственное число матрицы $[Q]$, то $|\lambda| \leq r$.

В.В. Кириченко предложил следующее определение

**Определение 2.1.** Индексом нетерова справа полусовершенного кольца $A$ называется максимальное действительное собственное значение $r$ матрицы смежности $[Q(A)]$ его колчана $Q(A)$.

Для индекса $r$ кольца $A$ будем использовать обозначение $in\, A = r$ или просто $in\, A$.

Пусть $A$ — нетерово с двух сторон полусовершенное полудистрибутивное кольцо (в дальнейшем, нетерово $SPSD$-кольцо), $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ — разложение кольца $A$ в прямую сумму попарно неизоморфных неразложимых проективных $A$-модулей.

По определению колчана $Q(A)$ полусовершенного кольца $A$ число его вершин равно $s$.

**Теорема 2.3** [8, теорема 4.1]. *Колчан $Q(A)$ нетерова с двух сторон неразложимого в прямое произведение полусовершенного полупервичного кольца $A$ сильно связен.*

Из теоремы 2.3 [6] следует такое утверждение.

**Теорема 2.4.** *Пусть $A$ — нетерово $SPSD$-кольцо. Тогда $[Q(A)]$ является $(0,1)$-матрицей и левый колчан $Q'(A)$ получается из колчана $Q(A)$ переворотом всех стрелок.*

**Теорема 2.5.** *Индекс нетерова SPSD-кольца A удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leq in\, A \leq s,$$

*где s обозначает число попарно неизоморфных неразложимых проективных A-модулей.*

Доказательство теоремы 2.5 следует из замечания 2 [7, гл.XIII], которое справедливо для произвольных перестановочно неприводимых матриц. Учитывая важность этого замечания, приведем его формулировку в удобном для нас виде.

**Замечание2.** *Пусть B — перестановочно неприводимая матрица, $C_i$ — сумма всех элементов i-ой строки матрицы B, $c = \min_i C_i$, $C = \max_i C_i$. Тогда $c \leq r \leq C$, причем знак равенства слева или справа от r имеет место лишь при $c = C$, т.е. когда все строчные суммы $C_1, C_2, \dots, C_n$ равны между собой.*

По следствию 7.7.3 [1], колчан $Q$ сильно связен тогда и только тогда, когда матрица $[Q]$ перестановочно неприводима и поэтому, используя теоремы 2.3 и 2.4, из замечания 2 следует утверждение теоремы 2.5.

Обозначим через $H_s(\mathcal{O})$ — наследственный приведенный черепичный порядок: $H_s(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(H_s(\mathcal{O}))\}$, где

$$\mathcal{E}(H_s(\mathcal{O})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 2.6.** *Следующие условия равносильны для нетерова справа полупервичного полусовершенного полудистрибутивного кольца A:*

*(a) кольцо A наследственно;*

*(b) $in\, A \leq 1$.*

**Доказательство.** $(a) \Rightarrow (b)$. По теореме 1.4, всякое такое кольцо эквивалентно в смысле Мориты конечному прямому произведению тел и колец вида $H_s(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ дискретно нормированное кольцо. Колчан такого кольца является несвязным объединением точек и нескольких простых циклов. Поэтому $in\, A \leq 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Снова, учитывая теорему 1.4, получаем, если $in\, A = 0$, то кольцо $A$ — полупросто и потому наследственно. Если $A$ является черепичным порядком, и $in\, A = 1$, то по замечанию 2 и теореме 2.4, в каждой строке и каждом столбце матрицы $[Q(A)]$ стоит ровно одна единица. Так как колчан $Q(A)$ сильно связен, то отсюда следует, что он является простым циклом, и, следовательно, $A$ эквивалентно в смысле Мориты кольцу $H_s(\mathcal{O})$. Теорема доказана.

## 3. Колчаны черепичных порядков

Пусть $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — черепичный порядок, т.е. нетерово полусовершенное первичное кольцо, $Q(\Lambda)$ — колчан $\Lambda$. До конца статьи, говоря "порядок", мы всегда считаем, что это черепичный порядок. Мы будем предполагать, что $\Lambda$ — приведенный порядок, т.е. факторкольцо $\Lambda/R$ является прямым произведением тел.

В этом случае $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$. (Отметим, что любой двусторонний идеал $J$ порядка $\Lambda$ задается матрицей показателей $\mathcal{E}(J)$). Переходя к изоморфному порядку, всегда можно считать первую строку матрицы $\mathcal{E}(\Lambda)$ нулевой. Поэтому для порядков $\Lambda$, лежащих в $M_2(D)$, можно считать, что $\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, и $Q(\Lambda)$ — либо простой цикл $C_2$, либо $[Q(\Lambda)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для порядков $\Lambda$, лежащих в $M_3(D)$, матрица $\mathcal{E}(\Lambda)$ имеет вид:

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma \\ \beta & \delta & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} (2,\alpha,\beta) & (1,\delta) & (1,\gamma) \\ (\beta+\gamma,\alpha+1) & (2,\alpha,\gamma+\delta) & (\alpha,\gamma+1) \\ (\alpha+\delta,\beta+1) & (\beta,\delta+1) & (2,\beta,\gamma+\delta) \end{pmatrix},$$

где $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = \min(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$.

Предположим, что в колчане $Q(\Lambda)$ нет петель. Переходя к изоморфному порядку, можно считать, что $1 \le \alpha \le \beta$. Поэтому, если $\beta = 1$, то либо $\Lambda \simeq H_3(\mathcal{O})$, либо $\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. В первом случае $Q(\Lambda)$ является простым циклом $C_3$, а во втором — $[Q(\Lambda)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что если есть петля в вершине 2, то есть петли и в вершинах 1 и 3. Поэтому либо $\alpha = 1$, либо $\gamma+\delta = 1$. Поскольку нет петли в вершине 1, то $\alpha = 1$. Так как $\beta \le \gamma+\delta$, то $\beta = 1$, и мы приходим к предыдущему случаю.

Предположим, что в $Q(\Lambda)$ ровно две петли. Тогда это должны быть петли в вершинах 1 и 3. Значит, $\alpha \ge 2$ и $\gamma+\delta \ge 2$, откуда $(2,\alpha,\gamma+\delta) = 2$, и в вершине тоже есть петля. Поэтому ровно двух петель быть не может.

Отметим, что в книге [9], приложение II, указаны пять сильно связных колчанов без петель и кратных стрелок. В качестве колчанов порядков реализуются только два: простой цикл $C_3$ и колчан $Q_3$ с матрицей смежности $[Q_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Предложение 3.1.** *Пусть $Q(\Lambda)$ — колчан произвольного черепичного порядка $\Lambda$ с тремя вершинами. Если в $Q(\Lambda)$ удалить все петли, то полученный колчан может быть любым сильно связным колчаном с тремя вершинами без петель и кратных стрелок.*

**Доказательство.** Пусть $R_i$ — радикал Джекобсона приведенного черепичного порядка $\Delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и $\mathcal{E}(\Delta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, $\mathcal{E}(R_1^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $[Q(\Delta_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\mathcal{E}(\Delta_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, $[Q(\Delta_2)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для $\mathcal{E}(\Delta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{E}(R_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{E}(R_3^2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому $Q(\Delta_3)$ является полным колчаном без кратных стрелок и кратных петель. Используя аналогичные методы, с помощью программ, разработанных и реализованных на ПК, получено **Предложение 3.2.** *Пусть $Q(\Lambda)$ — колчан произвольного черепичного порядка $\Lambda$ с четырьмя вершинами. Если в $Q(\Lambda)$ удалить все петли, то полученный колчан может быть любым сильно связным колчаном с четырьмя вершинами без петель и кратных стрелок.*

В приложении мы указываем список этих порядков.

## Приложение

Матрицы показателей и матрицы смежностей колчанов с четырьмя вершинами приведенных черепичных порядков

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{E}(\Lambda) & [Q(\Lambda)] & \mathcal{E}(\Lambda) & [Q(\Lambda)] \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&2&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&2&2&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\2&1&2&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\2&2&1&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\2&1&2&0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&2&0&0\\2&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\2&2&0&2\\2&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\2&2&0&2\\2&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&2\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&1&0&0\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&2\\3&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&0\\3&3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&1\\2&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\2&2&0&2\\2&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\2&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&2&0&0\\3&3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\2&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\3&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\2&2&0&1\\2&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&1\\3&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&0\\3&3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&2\\3&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&1&0&2\\2&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&2\\3&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\2&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&1\\ 2&2&0&0\\ 3&3&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 2&2&0&1\\ 2&2&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 2&2&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&0&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ 2&2&0&2\\ 3&3&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&0&1\\ 2&2&0&1\\ 2&2&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 0&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ 2&2&0&2\\ 4&4&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&0&1\\ 3&3&0&3\\ 3&3&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 2&2&0&1\\ 2&1&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 2&2&0&1\\ 2&2&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&0&0\\ 2&2&0&1\\ 2&2&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&2&2\\ 3&1&0&0\\ 3&2&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&1&1\\ 2&2&0&1\\ 2&2&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 2&1&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&0&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 2&2&0&1\\ 2&2&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&2&0\\ 2&2&0&2\\ 3&2&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&1\\ 2&2&0&0\\ 3&3&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ 2&2&0&2\\ 3&2&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&1\\ 2&2&0&2\\ 3&1&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&1&1\\ 2&1&0&1\\ 2&2&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&2&1\\ 2&2&0&1\\ 3&1&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ 2&1&0&1\\ 3&3&3&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&0\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 2&0&1&2\\ 2&2&0&1\\ 2&2&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&2\\2&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&2&0&2\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\2&2&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&1\\3&3&0&2\\3&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&1\\2&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&1\\3&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&2\\3&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&2&0&0\\3&2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&2&0&0\\3&3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&2&0&2\\3&3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&2&0&2\\3&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&1&0&2\\2&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&1&0&2\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&2&0\\2&2&0&0\\3&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&2&0&0\\3&2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&2&0&0\\3&3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&2&0&2\\3&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&2&0&1\\3&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&1&0&0\\3&3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&0\\2&1&0&1\\3&3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&2\\2&2&0&1\\2&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&1&1\\2&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Abstract.** The description of quivers of tiled orders with 2, 3, 4 vertices is obtained.

## Литература

[1] N.M.Gubareni, V.V.Kirichenko, *Rings and modules,* Chestochowa, 2001, 306 p.

[2] H.Bass, *Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings,* Trans. AMS, v.95 (1960), p. 446–488.

[3] А.Г.Завадский, В.В.Кириченко, *Модули без кручения над первичными кольцами,* Зап. Науч. Сем. ЛОМИ АН СССР, т.57 (1976), с. 100–116.

[4] V.A.Jategaonkar, *Global dimension of tiled orders over commutative noetherian domaines,* Trans AMS, 190, 1974, p. 357–374.

[5] V.P.Camillo, *Distributive modules,* J. Algebra, 1975, 36, no.1, p. 16–25.

[6] В.В.Кириченко, М.А.Хибина, *Полусовершенные полудистрибутивные кольца,* Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев, Институт математики (1993), с. 457–480.

[7] Ф.Р.Гантмахер, *Теория матриц,* М., Наука, 1967, 575 с.

[8] В.В.Кириченко, Самир Валио, Ю.В.Яременко, *Полусовершенные кольца и их колчаны,* Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев, Институт математики (1993), с. 438–456.

[9] Ф.Харари, *Теория графов,* Мир, М., 1973, 302 с.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко

Поступило 20.03.2001