Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D15

Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп

Т.Д.Лукашова

Напомним [1], что нормой $N(G)$ группы G называют пересечение нормализаторов всех подгрупп группы G. Естественным обобщением нормы группы является понятие нециклической нормы. Ее можно определить как пересечение нормализаторов всех нециклических подгрупп группы G, при условии, что система таких подгрупп непуста. В соответствии с [2] нециклическую норму в группе G будем обозначать N_G.

Очевидно, что подгруппа N_G характеристична в группе G и каждая нециклическая подгруппа из N_G инвариантна в ней. Неабелевы группы с инвариантными нециклическими подгруппами изучались в работах [3-4] и были названы $\bar{H}$-группами (или $\overline{H}_p$-группами, если они p-группы).

В данной работе изучаются конечные 2-группы, нециклическая норма которых недедекиндова.

Предложение 1 ([4]). Если G — конечная $\bar{H}_2$-группа, то она является группой одного из следующих типов:

1) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle, |a| = 8, |b| = 4, b^{-1}ab = a^{-1}, a^4 = b^2$;
2) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle, |a| = 8, |b| = 8, b^{-1}ab = a^{-1}, a^4 = b^4$;
3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle\langle d\rangle, |a| = |b| = |c| = |d| = 4, c^2 = d^2 = a^2b^2, [a, c] = [d, c] = a^2, [b, d] = b^2, [c, b] = [d, a] = c^2$;
4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle, |a| = |b| = |c| = 4, c^2 = a^2b^2, [c, a] = a^2, [c, b] = c^2$;
5) $G = (H \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2], |b| = |c| = 2, [H, \langle c\rangle] = 1, [c, b] = h_1^2$;
6) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle, |a| = 2^n, n \geq 1, |b| = |c| = 2, [c, a] = 1, [b, c] = a^{2^{n-1}}$;
7) $G = H \times \langle c\rangle, |c| = 2^n, n \geq 2, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$;
8) $G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle, |a| = 2^n, |b| = 2^m, n > 1, m \geq 1, [a, b] = a^{2^{n-1}}$.

Предложение 2.Пусть H — инвариантная нециклическая подгруппа группы G и N_G - нециклическая норма этой группы. Тогда $\overline{N_G} = N_GH/H \leq N(\bar{G}) = N(G/H)$, где $N(\bar{G})$ — норма группы $\bar{G}$.

Напомним, что нижним слоем группы G называют подгруппу $\omega(G)$, порожденную всеми элементами простого порядка этой группы.

Предложение 3.Если конечная 2-группа G имеет недедекиндову нециклическую норму N_G, нижний слой $\omega(N_G)$ которой является центральной нециклической подгруппой группы G, то $\omega(G) = \omega(N_G)$.

Теорема 1.*Пусть G — конечная 2-группа, нециклическая норма которой является группой одного из типов 1)–5) предложения 1, либо группой типа 8) этого предложения при $m = 1, n > 2$ или при $m > n$. Тогда в G инвариантны все нециклические подгруппы и $G = N_G$.*

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на пункты в зависимости от строения подгруппы N_G и допустим, что $G \neq N_G$.

1. Пусть нециклическая норма N_G является группой типа 1) предложения 1. Покажем, что в этом случае группа G имеет единственную инволюцию. Действительно, иначе существует элемент $x \in G \backslash N_G, |x| = 2$. Тогда $[N_G, \langle x \rangle] \subseteq \langle b^2, x \rangle \bigcap N_G = \langle b^2 \rangle, \langle b, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$ и потому $\langle b \rangle = \langle b, x \rangle \bigcap N_G \triangleleft G_1$, что невозможно. Следовательно, группа G имеет единственную инволюцию и по теореме 12.5.2 из [5] является кватернионной 2-группой. Так как $|G| > 16$, то в группе G найдется нециклическая подгруппа порядка 8, нормализатор которой не содержит N_G. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

2. Пусть исследуемая группа G имеет нециклической нормой группу типа 2) предложения 1. Тогда N_G содержит все инволюции группы G. В самом деле, иначе существует элемент $x \in G \backslash N_G, |x| = 2$. Так как $a^4 \in Z(G)$, то $\langle a^4, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$ и $[N_G, \langle x \rangle] \leq \langle a^4, x \rangle \bigcap N_G = \langle a^4 \rangle$. Отсюда следует, что $\langle x \rangle = \langle a^4, x \rangle \bigcap \langle x, a^2 b^2 \rangle \triangleleft G_1$ и потому $x \in N_{G_1}$, что невозможно для $\overline{H_2}$-групп (см. [3], лемма 4).

Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий N_G. По доказанному $|x| > 2$ и $\langle x \rangle \bigcap \omega(N_G) = \langle a^4 \rangle$. Рассмотрим фактор-группу $G/\omega(N_G) = \bar{G}$. Так как $\bar{N}_G = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ - группа кватернионов, то из предложения 2 и результатов работы [1] следует, что группа $\bar{G}$ не содержит элементов порядка 8. Поэтому $|\bar{x}| \leq 4$.

Если $|\bar{x}| = 2$, то $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G_1} = \langle \bar{x} \rangle \overline{N_G}$ и $[N_G, \langle x \rangle] \leq \omega(N_G)$. Отсюда $[x, a^2] = 1$ и $(xa^2)^2 = 1$, что невозможно. Итак, $|\bar{x}| = 4$. Ввиду соотношения $[\langle \bar{x} \rangle, \overline{N_G}] \leq \langle \overline{x^2} \rangle = \langle \overline{a^2} \rangle$ Подгруппа $\overline{N_G}$ содержит элемент $\bar{c}$ порядка 4, перестановочный с $\bar{x}$. Поэтому $|\bar{x}c| = 2$, вопреки доказанному.

3. Пусть N_G является группой типа 3) предложения 1. Возьмем элемент x наименьшего порядка из G, не принадлежащий норме N_G. Предположим, что $|x| = 2$. Поскольку $\omega(N_G) \triangleleft G$, то $\omega(N_G) \bigcap Z(G) \neq E$ и можно считать, что $a^2 \in Z(G)$. Тогда $\langle a^2, x \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G, [G_1 : C_{G_1}(\langle a^2, x \rangle)] \leq 2$ и, следовательно, квадрат любого элемента группы G_1 перестановочен с x. Отсюда $\omega(N_G) \leq Z(G_1)$, что невозможно ввиду предложения 3.

Значит $|x| > 2, x^2 \in N_G$ и $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$. Так как N_G не содержит инвариантных циклических подгрупп порядка 4, то $|x| = 4$ и $G_1^{/} \leq \omega(G)$. Отсюда следует, что всякая абелева нециклическая подгруппа группы G содержит $\omega(G)$ и потому инвариантна в ней. Таким образом, G является $\overline{HA_2}$- группой, что невозможно ввиду теоремы 3.1 из [6]. Противоречие показывает, что этот случай также невозможен.

4. Пусть N_G является группой типа 4) предложения 1. Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться, что подгруппа N_G содержит все инволюции группы G, и потому $\omega(N_G) = \omega(G)$.

Покажем, что G — группа экспоненты 4. Допустим, что это не так и существует элемент $x \in G, |x| = 8$. Если $x^2 \notin N_G$, то из условия $\langle x \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$ следует, что $[N_G, \langle x \rangle] \leq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap N_G = \omega(N_G)$ и $x^2 \in Z(G_1)$. Но в таком случае $\omega(G_1) \neq \omega(N_G)$, что невозможно. Следовательно, $x^2 \in N_G$.

Рассмотрим фактор-группу $G_1/\omega(G) = \overline{G_1}$. Так как $G_1^{/} \leq \langle x^2 \rangle \omega(G)$, то $\overline{G_1^{/}} \leq \langle \overline{x^2} \rangle$. Если группа $\overline{G_1}$ абелева, то $G_1^{/} \leq \omega(G)$ и $x^2 \in Z(G_1)$, что невозможно. Поэтому $\overline{G_1^{/}} = \langle \overline{x^2} \rangle, [\overline{G_1} : C_{\bar{G}_1}(\langle \bar{x} \rangle)] = 2$ и $\overline{N_G}$ содержит элемент $\bar{y}$ порядка 2, неперестановочный с $\bar{x}$. Тогда $|\overline{xy}| = 2$. Ввиду предложения 2 $\langle \overline{xy} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$ и потому $G_1^{/} \leq \omega(G)$, что невозможно по доказанному.

Итак, $exp(G) = 4$. Отсюда $G^{/} \leq \omega(G)$ и, следовательно, G является $\overline{HA_2}$-группой. Используя описание таких групп (см. [6], теорема 3.1) и учитывая, что $G \neq N_G$, получаем противоречие.

5. Пусть N_G является группой типа 5) предложения 1. Покажем, что N_G содержит все инволюции группы G. В самом деле, иначе существует элемент $x \in G \backslash N_G, |x| = 2$. Поскольку $\langle x, h_1^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$, то $[G_1 : C_{G_1}(\langle h_1^2, x \rangle)] \le 2$ и N_G $\langle h_1^2 \rangle$ содержит элемент y порядка 2, перестановочный с x. Тогда $\langle y \rangle = \langle x, y \rangle \bigcap N_G \triangleleft N_G$, что невозможно. Таким образом, $\omega(N_G) = \omega(G)$.

Пусть $x \in G\ N_G, |x| = 4$. Тогда $x_2 = h_1^2$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G_1} = \langle x \rangle N_G / \langle h_1^2 \rangle$. Из условия $\overline{N_G} \triangleleft \overline{G_1}$ следует, что $\overline{N_G} \bigcap Z(\overline{G_1}) \neq \bar{E}$. Пусть $\bar{y} \in (\overline{N_G} \bigcap Z(\overline{G_1}))$. Тогда $\langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle \triangleleft \overline{G_1}, [\overline{G_1} : C_{\overline{G_1}}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)] \le 2$ и $\overline{N_G} \bigcap C_{\overline{G_1}}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)$ — нециклическая подгруппа. Поэтому $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$, следовательно, $\overline{G_1}$ — абелева группа и $G_1^/ \le \langle h_1^2 \rangle$. Но в таком случае N_G содержит элемент g порядка 4, перестановочный с x. Отсюда $|gx| = 2$, вопреки доказанному.

Итак, N_G содержит все элементы порядка 4 группы G, поэтому ввиду допущения $G \neq N_G$ существует $x \in G, |x| = 8$. Так как $x^2 \in N_G$, и в N_G инвариантны все циклические подгруппы порядка 4, то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G$. Тогда $G_1^/ \le \langle x^2 \rangle$. Очевидно, что $G_1^/ \neq \langle h_1^2 \rangle$, так как в противном случае $Z(G_1)$ содержит элементы порядка 4. Итак, $G_1^/ = \langle x^2 \rangle$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G_1} = G_1 / \langle h_1^2 \rangle$. Поскольку $\bar{x} \notin Z(\overline{G_1})$, то существует элемент $\bar{y} \in \overline{N_G}, [\bar{x}, \bar{y}] \neq 1$. Отсюда $|\overline{xy}| = 2, xy \in N_G$ и $x \in N_G$, вопреки его выбору.

6. Пусть нециклическая норма N_G является группой типа 8) предложения 1 при $m = 1$и $n > 2$ или при $m > n$.

Рассмотрим сначала случай $n > 2, m = 1$.

Так как $N_G \triangleleft G$, то $\omega(N_G) = \langle a^{2^{n-1}}, b \rangle \triangleleft G$. Пусть $C = C_G(\omega(N_G))$. Тогда $C \triangleleft G, [G : C] = 2$ и $G = C\langle a \rangle, a^2 \in C$. Учитывая, что подгруппа $\omega(N_G)$ содержит все инволюции подгруппы С, а элемент $a^{2^{n-1}}$ принадлежит каждой циклической подгруппе составного порядка группы G, делаем вывод, что $C/\langle b \rangle = \tilde{C}$ имеет единственную инволюцию и, следовательно, является циклической или кватернионной 2-группой.

Допустим, что $\tilde{C}$ — кватернионная 2-группа, $\tilde{C} = \langle \tilde{h_1}, \tilde{h_2} \rangle, |\tilde{h_1}| = 2^k, k > 1, |\tilde{h_2}| = 4, \tilde{h_1^{2^{k-1}}} = \tilde{h_2^2}, \tilde{h_2^{-1}}\tilde{h_1}\tilde{h_2} = \tilde{h_1^{-1}}$. Тогда $\langle h_1 \rangle \bigcap \omega(N_G) = \langle h_2 \rangle \bigcap \omega(N_G) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и $h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1} b^m$. Если $m \neq 0$, то $(h_1 h_2)^2 = h_2^2 b^m \neq a^{2^{n-1}}$, что невозможно. Значит,$m = 0$ и $C = H \times \langle b \rangle$, где $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ — кватернионная 2-группа.

Так как $a^2 \in C, \langle a^2 \rangle \triangleleft G$, то, не нарушая общности, положим $a^2 = h_1^s b^t$. Тогда для элемента $h_2 \in H$ имеют место соотношения $[a, h_2] \in \langle h_2, b \rangle \bigcap H \bigcap N_G = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и $[a^2, h_2] = [h_1^s, h_2] = 1$. Последнее возможно лишь при условии, что $s \equiv 0 (mod 2^{k-1})$, где $|h_1| = 2^k$, откуда $|a| = 4$. Противоречие.

Значит, фактор-группа $C/\langle b \rangle = \tilde{C}$ циклична и потому С $= \langle x \rangle \times \langle b \rangle$ — абелева группа. Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/\omega(N_G) \cong \langle \bar{x} \rangle \langle \bar{a} \rangle$. Из предложения 1 и результатов работы [1] следует,что $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \bar{G}, \langle \bar{a} \rangle \triangleleft \bar{G}$. Так как $\langle \overline{a^2} \rangle \le \langle \bar{x} \rangle$, то в силу теоремы 12.5.1 из [5] $\bar{G}^/ \le \langle \overline{a^{2^{n-2}}} \rangle$. Пусть $\bar{G}^/ = E$, тогда $[x, a] = a^{2^{n-1}m} b^l$, и учитывая, что $[x, a^2] = 1 = a^{2^{n-1}l}$, получим $l \equiv 0 (mod 2)$. Отсюда $G^/ \le \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и G -$\overline{H_2}$-группа, вопреки допущению. Следовательно, $\bar{G}$ — неабелева группа и $\bar{G}^/ = \langle \overline{a^{2^{n-2}}} \rangle$. Пусть $[x, a] = a^{2^{n-2}s} b^r$. Так как $a^2 \in Z(G)$ и $G^/ \not\subset \omega(N_G)$, то $(s, 2) = (r, 2) = 1$ и поэтому $[x, a] = a^{\pm 2^{n-2}} b$. С другой стороны, $x^2 b \in Z(G)$ и можно считать, что $a^2 = x^2 b$. Если $|a| = 8$, то $|x| = 8$ и $\langle x, a \rangle$ — $\overline{H_2}$-группа типа 2) предложения 1. Пусть $|a| > 8$, тогда $|x| > 8$ и $|xa^{-1 \mp 2^{n-3}}| = 2$. Но, как нетрудно убедиться, $a \notin N_G(\langle a^{2^{n-1}}, xa^{-1 \mp 2^{n-3}} \rangle)$, что невозможно ввиду определения подгруппы N_G.

Дальше будем считать, что $m > n$. Из условия $\omega(N_G) \le Z(G)$ и предложения 3 следует, что $\omega(N_G) = \omega(G)$. Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий N_G. Тогда $x^2 \in N_G$ и $|x| > 2$. Положим $x^2 = a^k b^l$. Так как $\langle x\rangle\omega(N_G) \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G$, то $\langle x^2\rangle \lhd G_1$. Поэтому, если $(k,2) = 1$, то $x^2 = a^k b^{2^{m-n+1}l}$. Учитывая, что $[\langle x\rangle, N_G] \le \langle x^2\rangle\omega(N_G)$, положим $[x,b] = x^{2s}z$, где $z \in \omega(N_G)$. Тогда $[x^2,b] = a^{2^{n-1}k} = a^{2ks}b^{2^{m-n+2}sl}$, откуда $ks \equiv ls \equiv 0(mod 2^{n-2})$. Таким образом, $[x,b] = a^{2^{n-2}kt}b^{2^{m-1}lt}$, причем $(kt,2) = 1$, так как иначе $[x^2,b] = 1$.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G_1} = G_1/\omega(N_G) \simeq \langle\bar{x}\rangle\overline{N_G}$. Из предложения 2 следует, что $\overline{N_G} \le N(\overline{G_1})$, поэтому $\overline{N_G}$ содержится в нормализаторе каждой подгруппы группы $\overline{G_1}$. Но $\bar{b} \notin N_{\bar{G}}(\langle\overline{bx}\rangle)$, что невозможно. Таким образом, $(k,2) \ne 1$ и $x^2 = a^{2k}b^{2l}$.

Поскольку $[\langle x\rangle, N_G] \le \langle x^2\rangle\omega(N_G) \le Z(G_1)$ и $[\langle x^2\rangle, N_G] = [\langle x\rangle, N_G]^2 = 1$, то $G_1' \le \omega(N_G)$. Следовательно, каждая абелева нециклическая подгруппа группы G_1 является её инвариантной подгруппой и по теореме 3.1 работы [6] G_1 является прямым или полупрямым произведением циклической подгруппы $\langle y\rangle$ и группы кватернионов H. Если $[\langle y\rangle, H] \ne 1$, то $N_{G_1} \le \langle y^2\rangle \times H$. Учитывая $N_G \le N_{G_1}$ и $[G_1 : N_G] = 2$, заключаем, что $N_G = \langle y^2\rangle \times H$. Последнее, очевидно, невозможно. Поэтому $G_1 = \langle y\rangle \times H$. Тогда $|a| = 4$ и ввиду выбора элемента $x, |x| = 4, H = \langle a, x\rangle, [b,x] = 1$.

Покажем, что фактор-группа $\tilde{G} = G/N_G$ имеет единственную инволюцию.Предположим что это не так. Тогда $\tilde{G} \ge \langle\tilde{x}\rangle \times \langle\tilde{y}\rangle, |\tilde{x}| = |\tilde{y}| = 2$. По доказанному в каждом смежном классе xN_G и yN_G найдутся такие элементы x_1 и y_1 соответственно, что $|x_1| = |y_1| = 4, x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1,a] = [y_1,a]$ и $[x_1,b] = [y_1,b] = 1$. Пусть $[x_1,y_1] = a^r b^s$. Тогда $[x_1^2, y_1] = a^{2r}b^{2s}a^{2(rs+r)}$, поэтому $s \equiv 0(mod 2^{m-1})$ и $(x_1y_1)^2 = a^r b^{2^{m-1}s}$. Если $(r,2) \ne 1$, то $|x_1y_1a^{-r/2}b^{2^{m-2}s}| = 2$, откуда $x_1y_1a^{-r/2}b^{2^{m-2}s} \in N_G$ и $x_1 \in y_1N_G$. Пусть $(r,2) = 1$. Тогда из условия $[x_1y_1, b] = 1$ следует $[(x_1y_1)^2, b] = [a^r, b] = 1$, что невозможно. Таким образом, фактор-группа $\tilde{G}$ имеет единственную инволюцию.

Пусть $|\tilde{G}| = 2$. Тогда G — $\overline{H}_2$-группа и $G = N_G$, вопреки допущению. Следовательно,$\tilde{G}$ содержит элемент $\tilde{x}$ порядка 4 и $x^4 = a^{2k}b^{2l}$. Так как $[\langle x\rangle, N_G] \le \langle x^4\rangle\omega(N_G) \le Z(G)$ то $[x,a] \in \omega(N_G)$. По доказанному в группе $\langle x\rangle N_G$ найдется элемент $y = x^2z, z \in N_G$, перестановочный с b, поэтому $[x^2z, b] = 1$ и $[x^2,b] \in \langle a^2\rangle$. Пусть $[x,b] = a^{2ks}b^{2ls}z_1, z_1 \in \omega(N_G)$. Тогда $[x^2,b] = b^{4ls}$ и $ls \equiv 0(mod 2^{m-2})$. Отсюда $[x,b] \in \omega(N_G)$ и $[\langle x\rangle, N_G] \le \omega(N_G)$. Но в таком случае $x^2 \in Z(G)$, что невозможно.

Так как в каждом из случаев получено противоречие, то допущение теоремы неверно. Теорема доказана.

Следующая теорема дает полное описание конечных 2-групп, нециклическая норма которых недедекиндова.

Теорема 2. *Конечные 2-группы, нециклическая норма которых недедекиндова, исчерпываются группами следующих типов:*

1) G — *негамильтонова* $\overline{H}_2$*-группа;* $G = N_G$;

2) $G = (\langle x\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle\lambda\langle d\rangle, |x| = 2^n, n > 2, |b| = |c| = |d| = 2, [x,c] = [x,b] = 1, [b,c] = [c,d] = [b,d] = x^{2^{n-1}}, d^{-1}xd = x^{-1}; N_G = (\langle x^{2^{n-2}}\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle;$

3) $G = (\langle x\rangle\lambda\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle, |x| = 2^n, n > 3, |b| = |c| = 2, [x,c] = x^{\pm 2^{n-2}}b, [b,c] = [x,b] = x^{2^{n-1}}; N_G = (\langle x^2\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle;$

4) $G = \langle x\rangle\lambda H, |x| = 2^n, n > 2, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1,h_2], [\langle x\rangle, H] = \langle x^{2^{n-1}}\rangle; N_G = \langle x^2\rangle \times H;$

5) $G = (\langle x\rangle \times H)\langle y\rangle, |x| = 2^n, n \ge 2, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1,h_2], y^2 = x^{2^{n-1}}, y^{-1}xy = x^{-1}, [y,h_2] = 1, [y,h_1] = y^2; N_G = \langle h_2\rangle\lambda\langle h_1x^{2^{n-2}}\rangle;$

6) $G = \langle x\rangle\langle b\rangle, |x| = 2^k, |b| = 2^m, m > 2, k \geq m+1, Z(G) = \langle x^{2^{r+1}}\rangle \times \langle b^{2^{r+1}}\rangle, 1 \leq r \leq m-2, [x,b] = x^{2^{k-r-1}s} b^{2^{m-1}t}, 0 < s < 2, 0 \leq t < 2; N_G = \langle x^{2^r}\rangle \lambda \langle b\rangle$;

7) $G = \langle x\rangle\langle b\rangle, |x| = 2^k, |b| = 2^m, m \geq 1$; *при* $m = 1 k = 3, [x,b] = x^2, N_G = \langle x^2\rangle\lambda\langle b\rangle$; *при* $m > 1 k \geq 2m-1, [x,b] = x^{2^{k-m}s} b^{2^{m-1}t}, 0 < s < 2, 0 \leq t < 2$, *при* $m = 2, k > 2m-1$ *и* $t = 0; N_G = \langle x^{2^{m-1}}\rangle\lambda\langle b\rangle$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость. Если G — негамильтонова $\overline{H_2}$-группа, то $G = N_G$ и G является группой типа 1) теоремы.

Пусть $G \neq N_G$. Ввиду теоремы 1 и предложения 1 можно считать, что N_G — группа одного из типов 6), 7) или группа типа 8) при $n \geq m > 1$ или при $n = 2, m = 1$ предложения 1.

Рассмотрим каждый из указанных для N_G случаев отдельно и дальнейшее доказательство теоремы продолжим в леммах 1- 6.

Лемма 1. *Если G — конечная 2-группа, имеющая нециклическую норму $N_G \neq G$, $N_G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle, |a| = 2^n, n \geq 2, |b| = |c| = 2, [c,a] = 1, [b,c] = a^{2^{n-1}}$, то G — группа типа 2) или 3) теоремы.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $n = 2$. Тогда из $N_G \triangleleft G$ следует, что в фактор-группе $G/\langle a\rangle = \bar{G}$ пересечение $\overline{N_G} \bigcap Z(\bar{G})$ нетривиально и, например, $\bar{c} \in Z(\bar{G})$. Отсюда $\langle a, c\rangle \triangleleft G$, и потому $\langle a^2, c\rangle \triangleleft G$ как характеристическая подгруппа группы $\langle a, c\rangle$. Пусть $C = C_G(\langle a^2, c\rangle)$. Тогда $C \triangleleft G, [G:C] = 2$ и $G = C\lambda\langle b\rangle$. Ввиду леммы 4 работы [3] подгруппа $\langle a^2, c\rangle$ содержит все инволюции своего централизатора. Следовательно, фактор-группа $\tilde{C} = C/\langle c\rangle$ имеет единственную инволюцию, и по теореме 12.5.2 из [5], является циклической или кватернионной 2-группой.

Допустим, что подгруппа $\tilde{C}$ циклическая. Тогда, очевидно, $C = \langle x\rangle \times \langle c\rangle$- абелева группа и $[x,b] \in N_G \bigcap C = \langle a, c\rangle$. Если $|[x,b]| = 2$, то G – $\overline{H_2}$-группа, что невозможно. Следовательно, $|[x,b]| > 2$. Тогда $[x,b] = a^{\pm 1}c, (xb)^2 \in Z(G)$ и $|x| \leq 8$. Нетрудно проверить, что в таком случае $x^2 = a^{\pm 1}c$, и либо $b \notin N_G(\langle a^2, xb\rangle)$, либо $b \notin N_G(\langle a^2, xbc\rangle)$, вопреки условию.

Таким образом, $\tilde{C}$ — кватернионная 2-группа, $\tilde{C} = \langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2\rangle, |\tilde{h_1}| = 2^n, n > 1, |\tilde{h_2}| = 4, \tilde{h}_1^{2^{n-1}} = \tilde{h}_2^2, \tilde{h}_2^{-1}\tilde{h}_1\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1^{-1}$. Пусть h_1 и h_2 — прообразы элементов $\tilde{h_1}$ и $\tilde{h_2}$ соответственно. Тогда ввиду цикличности $Z(G)$ $h_1^{2^{n-1}} = h_2^2 = a^2$ и $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}c^m$. Если при этом $m \neq 0$, то $(h_1h_2)^2 = a^2c$, что невозможно. Поэтому, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$ и $C = H \times \langle c\rangle$. Из условий $H \triangleleft G$ и $N_G^2 \leq Z(G)$ следует, что $[H, N_G] \leq \langle a^2\rangle$. Поэтому $B = \langle b, c\rangle \triangleleft G, [B,G] \leq \langle a^2\rangle$, и по лемме 1 из [7],

$$G = BC_G(B).$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $C_G(B) = H$. Если $|H| = 8$, то вопреки условию G является $\overline{H_2}$-группой. Поэтому $|H| > 8$ и G — группа типа 2) теоремы.

2. Далее будем считать, что $n \geq 3$. Покажем, что в этом случае нециклическая норма N_G содержит все элементы группы G, порядок которых не превышает 4. Предположим, что это не так и существует инволюция x, не принадлежащая N_G. Тогда $\langle a^{2^{n-1}}, x\rangle \triangleleft G_1 = \langle x\rangle N_G$ и $[G_1 : C_{G_1}(\langle a^{2^{n-1}}, x\rangle)] \leq 2$. Следовательно, N_G имеет инволюцию y такую, что $[x,y] = 1$. Отсюда $\langle y\rangle = \langle y, x\rangle \bigcap N_G \triangleleft G_1$, что невозможно.

Пусть $x_1 \in G \backslash N_G, |x_1| = 4$. Тогда $x_1^2 = a^{2^{n-1}}$ и поскольку $\langle a\rangle \triangleleft G$, то группа $\langle a, x_1\rangle$ имеет циклическую подгруппу индекса 2. Учитывая предыдущие рассуждения и теорему 12.5.1 из [5], делаем вывод, что $\langle a, x_1\rangle$ — кватернионная 2-группа. Пусть

$y \in N_G, |y| = 2$. Тогда $[y, x_1] = 1$. В самом деле, иначе $[y, x_1] \in \langle a, x_1\rangle \bigcap N_G = \langle a\rangle$. Так как $[y^2, x_1] = [y, x_1^2] = 1$, то $[y, x_1] = x_1^2$ и $|yx_1| = 2$, вопреки доказанному. Таким образом, $[x_1, b] = [x_1, c] = 1$, откуда $(x_1bc)^2 = 1$, что также невозможно. Следовательно, N_G содержит все элементы группы G, порядок которых не превышает 4.

Рассмотрим фактор-группу $G/\langle a\rangle = \bar{G}$. Так как $\overline{N_G} \lhd \bar{G}$, то $\overline{N_G} \bigcap Z(\bar{G}) \neq \bar{E}$ и потому можно считать, что $\bar{c} \in Z(\bar{G})$. Тогда $\langle a, c\rangle \lhd G$ и $\langle a^{2^{n-1}}, c\rangle \lhd G$. Обозначим $C = C_G(\langle a^{2^{n-1}}, c\rangle)$. Тогда $C \lhd G$ и $G = C\lambda\langle b\rangle$. Покажем, что группа C абелева. Действительно, так как фактор-группа $C/\langle c\rangle$ имеет единственную инволюцию, то она циклична либо является кватернионной 2-группой. В последнем случае подгруппа C содержит элементы порядка 4, не принадлежащие N_G. Следовательно, фактор-группа $C/\langle c\rangle$ циклична и потому группа $C = \langle x\rangle \times \langle c\rangle$ абелева.

Учитывая, что $[x, b] \in C \bigcap N_G = \langle a, c\rangle$, положим $[x, b] = a^m c^k$. Так как $|[x, b]| > 2$, то $m = 2^{n-2}m_1, (m_1, 2) = (k, 2) = 1$. Поэтому можно считать, что $[x, b] = a^{\pm 2^{n-2}}c$. Отсюда $(xb)^2 \in Z(G)$, и не нарушая общности рассуждений, $(xb)^2 = a$. Положим $y = xb$. Тогда $|y| = 2^{n+1}, [y, c] = y^{2^n}, [y, b] = y^{\pm 2^{n-1}}c$ и G — группа типа 3) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = H \times \langle c\rangle, |c| = 2^n > 2, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, то G — группа типа 4) теоремы.*

Доказательство. Так как $\omega(N_G) \leq Z(G)$, то в силу предложения 3 $\omega(G) = \omega(N_G)$. Пусть $\omega_2(N_G)$ — подгруппа из N_G, порожденная элементами, порядок которых не превышает 4. Покажем, что $\omega_2(N_G) = \omega_2(G)$. Допустим противное и рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle x\rangle\omega_2(N_G)$, где $x \in G\backslash N_G, |x| = 4$. Так как $G_1' \leq \omega(G) \leq Z(G_1)$, то $G - \overline{HA_2}$ — группа и ввиду теоремы 3.1 работы [6] G_1 — прямое или полупрямое произведение двух групп кватернионов. Нетрудно проверить, что нециклическая норма N_{G_1} группы G_1 не содержит $\omega_2(N_G)$, что невозможно. Следовательно, $\omega_2(N_G) = \omega_2(G)$.

Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий N_G. Тогда $x^2 \in N_G$ и $|x| > 4$. Положим $x^2 = c^m h^k, h \in H$. Так как $\langle x\rangle\omega(N_G) \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G$, то $\langle x^2\rangle \lhd G_1$. Учитывая предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться, что $k \equiv 0(mod2)$ и $x^2 = c^m h^{2k}$. Пусть $m = 2l$. Тогда из соотношений $[x^2, c] = 1$ и $[x, c] \in N_G \bigcap \langle x\rangle\omega(N_G) = \langle x^2\rangle\omega(N_G)$ следует, что $[x, c] \in \omega(N_G) \leq Z(G)$. Поэтому $(xc^{-l})^2 = x^2c^{-2l}z = h^{2k}z$, где $z \in \omega(N_G)$ и $|xc^{-l}| \leq 4$. Но в таком случае $x \in N_G$, вопреки его выбору. Значит, $(m, 2) = 1$ и потому при $|c| > 4$ фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ имеет единственную инволюцию.

Покажем, что аналогичное утверждение имеет место и при $|c| = 4$. Допустим противное. Тогда фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ содержит подгруппу $\langle \bar{x}\rangle \times \langle \bar{y}\rangle$ порядка 4. Переходя к прообразам и учитывая предыдущие расуждения, положим $[x, y] = c^l h^t, h \in H, x^2 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1$. Так как $(xy)^2 = c^{l+(m_1+m_2)}h^{t+2(k_1+k_2)}$, то в силу доказанного $t \equiv 0(mod2)$. Тогда ввиду $[x, c] = [y, c] = 1$ и $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$, получим, что и $l \equiv 0(mod2)$. Но в таком случае $(xy)^2 \in \omega(N_G)$ и $x \in y\omega_2(N_G)$.

Следовательно, фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ имеет единственную инволюцию и потому является циклической или кватернионной 2-группой. В последнем случае $\bar{G}$ содержит группу кватернионов $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$ порядка 8, и тогда $|c| \leq 8$.

Если $|c| = 8$, то, переходя к прообразам и учитывая предыдущие рассуждения, положим $x^2 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1, y^{-1}xy = xy^2c^{2l}h^t, h \in H$. Так как $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega(N_G), [x^2, y] = [x, y^2] = 1$, то $y^{-1}x^2y = x^2 = x^2y^4c^{4l}h^{2t}z = x^2c^{2m_2}z_1$, где $z, z_1 \in \omega(N_G)$, и потому $(m_2, 2) \neq 1$. Противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Пусть $|c| = 4$. Тогда $x^2 = y^2c^r h^s, y^{-1}xy = xy^2c^{l_1}h^{/t_1}, x^4 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^4 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1$. Нетрудно убедиться, что $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega(N_G)$ и $[\langle y\rangle, N_G] \leq$

$\omega(N_G)$. Поэтому из равенств $[x,x^2] = [x, y^2c^rh^s] = [x,c^rh^s][x,y^2]^{c^rh^s} = 1$, получим $[x,c^rh^s] \in \omega(N_G)$ и $[x,y^2] \in \omega(N_G)$. С другой стороны, $y^{-2}xy^2 = xy^4(c^{l_1}h^{/t_1})^2z = xc^{m_2}h^{2k_2}z_1$, где $z, z_1 \in \omega(N_G)$, откуда $(m_2, 2) \neq 1$, что невозможно. Таким образом, фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ циклична и $G = \langle x\rangle\omega_2(N_G)$.

Поскольку $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega_2(N_G)\bigcap\langle x\rangle\omega(N_G) \leq Z(G), [x,c] = 1$ и $[\langle x\rangle, N_G^2] = 1$, то $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega(N_G)$. Следовательно, $x^2 \in N_G$ и $|G^/| > 2$, так как $G \neq N_G$. Применяя теорему Б из [8], приходим к выводу, что G — группа типа 4) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle, |a| = 4, |b| = 2, [a,b] = a^2$, то G — группа типа 7) теоремы при $m = 1$.*

Доказательство. Пусть $x \in G, |x| = 2$. Тогда $[\langle x\rangle, N_G] \leq \langle x, a^2\rangle\bigcap N_G = \langle a^2\rangle, [\omega(G), N_G] \leq \langle a^2\rangle$ и, ввиду леммы 1 из [7],
$$\omega(G) = CN_G, \text{ где } C = C_{\omega(G)}(N_G), C\bigcap N_G = \langle a^2\rangle.$$

Так как G не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то C имеет единственную инволюцию и потому является циклической или кватернионной 2- группой, причем в первом случае $|C| \leq 4$.

Пусть $|C| \geq 4$ и $x \in G\backslash\omega(G), |x| = 4$. Так как $\overline{\omega(G)} = \bar{C} \triangleleft \bar{G} = G/N_G$, то найдется элемент $\bar{z} \in \bar{C}\bigcap Z(\bar{G}), |\bar{z}| = 2$. Тогда $[z,x] = a^mb^n$, и можно считать, что $z \in C, |z| = 4$. Поскольку $(zx)^2 = a^mb^n$, то ввиду цикличности $Z(N_G)n \equiv 0(mod2)$. Допустим, что $m \not\equiv 0(mod2)$. Тогда $[zx,a] = 1, [x,a] = 1$ и, следовательно, $(xa)^2 = 1$, что невозможно по доказанному. Тогда $[z,x] = a^2$ и $\langle z,x\rangle$ — группа кватернионов. Так как $[\langle x\rangle, N_G] \leq N_G\bigcap\langle z,x\rangle = \langle a^2\rangle$, нетрудно проверить, что N_G содержит элемент y такой, что $|xy| = 2$. Поэтому $x \in \omega(G)$, вопреки его выбору. Итак, в этом случае $\omega(G)$ содержит все элементы порядка 4 из G, и потому $\overline{\omega(G)} = \omega(\bar{G})$.

Далее рассмотрим каждый из указанных для подгруппы C случаев отдельно.

Пусть $C = \langle z\rangle, |z| = 4$. Из последнего замечания следует, что $\bar{G}$ циклична или является кватернионной 2-группой. Но тогда вопреки условию, $z \in Z(G)$.

Пусть $C = \langle x,y\rangle$ — группа кватернионов порядка 8. По доказанному в фактор-группе $\bar{G} = G/N_G\ \overline{\omega(G)} = \omega(\bar{G})$. Покажем, что $\bar{C} = \bar{G}$. В самом деле, пусть $\bar{z} \in \bar{G}, |\bar{z}| = 4$. Тогда, $\bar{z}^2 = \bar{x}$ и $[\bar{z},\bar{y}] = 1$. Переходя к прообразам, положим $[z,y] = a^mb^n$. Тогда $(zy)^2 = xa^{m+2}b^n$. Так как $[\langle z\rangle, N_G] \leq \langle a\rangle$, то $[z,b] = a^t$. При $(t,2) = 1, |zb| = 4$ и $z \in \omega(G)$, вопреки его выбору. Следовательно, $[z,N_G] \leq \langle a^2\rangle$. Итак, $[\langle(zy)^2\rangle, N_G] = 1$, откуда $n \equiv m \equiv 0(mod2)$. Но в таком случае, $[z,y] = a^{2s}, [z^2,y] = [x,y] = 1$, что невозможно. Итак, $\omega(G) = G$ и G, вопреки допущению, является $\overline{H}_2$-группой.

Пусть $C = \langle x,y\rangle$ — кватернионная 2-группа, $|x| = 2^k > 4$. Тогда в фактор-группе $\bar{G} = G/N_G$ подгруппа $\langle\overline{x^{2^{k-3}}}\rangle$ инвариантна, так как является характеристической подгруппой группы $\langle\bar{x}\rangle$. Следовательно, $\bar{G} = C_{\bar{G}}(\langle\overline{x^{2^{k-3}}}\rangle)\langle\bar{y}\rangle = \langle\bar{z}\rangle\lambda\langle\bar{y}\rangle$, причем $\overline{y^{-1}}\bar{z}\bar{y} = \overline{z^{-1}}\,\overline{z^{2^{s-1}l}}$, где $|\bar{z}| = 2^s$. Если $l \neq 1$, то $\bar{G} = \omega(\bar{G})$, и норма нециклических подгрупп группы G отлична от N_G.

Учитывая, что $[z,N_G] \leq \langle a\rangle$, нетрудно показать, что в смежном классе zN_G найдется элемент z_1 такой, что $|z_1| = |z|, z_1^2 \in C$. Тогда $z_1^2 = x$ и $y^{-1}z_1y = z_1^{-1}z_1^{2^{s-1}}a^mb^n, z_1^{2^s} = a^2$. Так как $y^{-1}z_1^2y = z_1^{-2} = z_1^{-2}a^{m+2}b^na^r$, где $[z_1, a^mb^n] = a^r$, то $n \equiv 0(mod2)$, откуда $r \equiv 0(mod2)$ и $m \equiv 0(mod2)$. С другой стороны, $y^{-2}z_1y^2 = z_1z_1^{2^s}a^{4m} = z_1$, следовательно, $z_1^{2^s} = 1$, что невозможно.

Итак, $|C| = 2$ и $\omega(G) = N_G$. Так как $\langle a\rangle \triangleleft G, [G : C_G(\langle a\rangle)] = 2$, то $G = C_G(\langle a\rangle)\langle b\rangle$. Поскольку подгруппа $C_G(\langle a\rangle)$ имеет единственную инволюцию, то она циклична, $C_G(\langle a\rangle) =$

$y \in N_G, |y| = 2$. Тогда $[y, x_1] = 1$. В самом деле, иначе $[y, x_1] \in \langle a, x_1\rangle \bigcap N_G = \langle a\rangle$. Так как $[y^2, x_1] = [y, x_1^2] = 1$, то $[y, x_1] = x_1^2$ и $|yx_1| = 2$, вопреки доказанному. Таким образом, $[x_1, b] = [x_1, c] = 1$, откуда $(x_1bc)^2 = 1$, что также невозможно. Следовательно, N_G содержит все элементы группы G, порядок которых не превышает 4.

Рассмотрим фактор-группу $G/\langle a\rangle = \bar{G}$. Так как $\overline{N_G} \lhd \bar{G}$, то $\overline{N_G} \bigcap Z(\bar{G}) \neq \bar{E}$ и потому можно считать, что $\bar{c} \in Z(\bar{G})$. Тогда $\langle a, c\rangle \lhd G$ и $\langle a^{2^{n-1}}, c\rangle \lhd G$. Обозначим $C = C_G(\langle a^{2^{n-1}}, c\rangle)$. Тогда $C \lhd G$ и $G = C\lambda\langle b\rangle$. Покажем, что группа C абелева. Действительно, так как фактор-группа $C/\langle c\rangle$ имеет единственную инволюцию, то она циклична либо является кватернионной 2-группой. В последнем случае подгруппа C содержит элементы порядка 4, не принадлежащие N_G. Следовательно, фактор-группа $C/\langle c\rangle$ циклична и потому группа $C = \langle x\rangle \times \langle c\rangle$ абелева.

Учитывая, что $[x, b] \in C \bigcap N_G = \langle a, c\rangle$, положим $[x, b] = a^m c^k$. Так как $|[x, b]| > 2$, то $m = 2^{n-2}m_1, (m_1, 2) = (k, 2) = 1$. Поэтому можно считать, что $[x, b] = a^{\pm 2^{n-2}}c$. Отсюда $(xb)^2 \in Z(G)$, и не нарушая общности рассуждений, $(xb)^2 = a$. Положим $y = xb$. Тогда $|y| = 2^{n+1}, [y, c] = y^{2^n}, [y, b] = y^{\pm 2^{n-1}}c$ и G — группа типа 3) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = H \times \langle c\rangle, |c| = 2^n > 2, H = \langle h_1, h_2\rangle, |h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, то G — группа типа 4) теоремы.*

Доказательство. Так как $\omega(N_G) \leq Z(G)$, то в силу предложения 3 $\omega(G) = \omega(N_G)$. Пусть $\omega_2(N_G)$ — подгруппа из N_G, порожденная элементами, порядок которых не превышает 4. Покажем, что $\omega_2(N_G) = \omega_2(G)$. Допустим противное и рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle x\rangle\omega_2(N_G)$, где $x \in G\backslash N_G, |x| = 4$. Так как $G_1' \leq \omega(G) \leq Z(G_1)$, то $G - \overline{HA_2}$ — группа и ввиду теоремы 3.1 работы [6] G_1 — прямое или полупрямое произведение двух групп кватернионов. Нетрудно проверить, что нециклическая норма N_{G_1} группы G_1 не содержит $\omega_2(N_G)$, что невозможно. Следовательно, $\omega_2(N_G) = \omega_2(G)$.

Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий N_G. Тогда $x^2 \in N_G$ и $|x| > 4$.Положим $x^2 = c^m h^k, h \in H$. Так как $\langle x\rangle\omega(N_G) \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G$, то $\langle x^2\rangle \lhd G_1$. Учитывая предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться, что $k \equiv 0(mod2)$ и $x^2 = c^m h^{2k}$. Пусть $m = 2l$. Тогда из соотношений $[x^2, c] = 1$ и $[x, c] \in N_G \bigcap \langle x\rangle\omega(N_G) = \langle x^2\rangle\omega(N_G)$ следует, что $[x, c] \in \omega(N_G) \leq Z(G)$. Поэтому $(xc^{-l})^2 = x^2c^{-2l}z = h^{2k}z$, где $z \in \omega(N_G)$ и $|xc^{-l}| \leq 4$. Но в таком случае $x \in N_G$, вопреки его выбору. Значит, $(m, 2) = 1$ и потому при $|c| > 4$ фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ имеет единственную инволюцию.

Покажем, что аналогичное утверждение имеет место и при $|c| = 4$. Допустим противное. Тогда фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ содержит подгруппу $\langle\bar{x}\rangle \times \langle\bar{y}\rangle$ порядка 4. Переходя к прообразам и учитывая предыдущие расуждения, положим $[x, y] = c^l h^t, h \in H, x^2 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1$. Так как $(xy)^2 = c^{l+(m_1+m_2)}h^{t+2(k_1+k_2)}$, то в силу доказанного $t \equiv 0(mod2)$. Тогда ввиду $[x, c] = [y, c] = 1$ и $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$, получим, что и $l \equiv 0(mod2)$. Но в таком случае $(xy)^2 \in \omega(N_G)$ и $x \in y\omega_2(N_G)$.

Следовательно, фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ имеет единственную инволюцию и потому является циклической или кватернионной 2-группой. В последнем случае $\bar{G}$ содержит группу кватернионов $\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle$ порядка 8, и тогда $|c| \leq 8$.

Если $|c| = 8$, то, переходя к прообразам и учитывая предыдущие рассуждения, положим $x^2 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^2 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1, y^{-1}xy = xy^2c^{2l}h^t, h \in H$. Так как $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega(N_G), [x^2, y] = [x, y^2] = 1$, то $y^{-1}x^2y = x^2 = x^2y^4c^{4l}h^{2t}z = x^2c^{2m_2}z_1$, где $z, z_1 \in \omega(N_G)$, и потому $(m_2, 2) \neq 1$. Противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Пусть $|c| = 4$. Тогда $x^2 = y^2c^rh^s, y^{-1}xy = xy^2c^{l_1}h^{l t_1}, x^4 = c^{m_1}h^{2k_1}, y^4 = c^{m_2}h^{2k_2}, (m_1, 2) = (m_2, 2) = 1$. Нетрудно убедиться, что $[\langle x\rangle, N_G] \leq \omega(N_G)$ и $[\langle y\rangle, N_G] \leq$

$\omega(N_G)$. Поэтому из равенств $[x, x^2] = [x, y^2 c^r h^s] = [x, c^r h^s][x, y^2]^{c^r h^s} = 1$, получим $[x, c^r h^s] \in \omega(N_G)$ и $[x, y^2] \in \omega(N_G)$. С другой стороны, $y^{-2} x y^2 = x y^4 (c^{l_1} h^{/t_1})^2 z = x c^{m_2} h^{2k_2} z_1$, где $z, z_1 \in \omega(N_G)$, откуда $(m_2, 2) \neq 1$, что невозможно. Таким образом, фактор-группа $\bar{G} = G/\omega_2(N_G)$ циклична и $G = \langle x \rangle \omega_2(N_G)$.

Поскольку $[\langle x \rangle, N_G] \leq \omega_2(N_G) \bigcap \langle x \rangle \omega(N_G) \leq Z(G), [x, c] = 1$ и $[\langle x \rangle, N_G^2] = 1$, то $[\langle x \rangle, N_G] \leq \omega(N_G)$. Следовательно, $x^2 \in N_G$ и $|G^/| > 2$, так как $G \neq N_G$. Применяя теорему Б из [8], приходим к выводу, что G — группа типа 4) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, |a| = 4, |b| = 2, [a, b] = a^2$, то G — группа типа 7) теоремы при $m = 1$.*

Доказательство. Пусть $x \in G, |x| = 2$. Тогда $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle x, a^2 \rangle \bigcap N_G = \langle a^2 \rangle, [\omega(G), N_G] \leq \langle a^2 \rangle$ и, ввиду леммы 1 из [7],

$$\omega(G) = CN_G, \text{ где } C = C_{\omega(G)}(N_G), C \bigcap N_G = \langle a^2 \rangle.$$

Так как G не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то C имеет единственную инволюцию и потому является циклической или кватернионной 2- группой, причем в первом случае $|C| \leq 4$.

Пусть $|C| \geq 4$ и $x \in G \backslash \omega(G), |x| = 4$. Так как $\overline{\omega(G)} = \bar{C} \triangleleft \bar{G} = G/N_G$, то найдется элемент $\bar{z} \in \bar{C} \bigcap Z(\bar{G}), |\bar{z}| = 2$. Тогда $[z, x] = a^m b^n$, и можно считать, что $z \in C, |z| = 4$. Поскольку $(zx)^2 = a^m b^n$, то ввиду цикличности $Z(N_G) n \equiv 0 (mod 2)$. Допустим, что $m \not\equiv 0 (mod 2)$. Тогда $[zx, a] = 1, [x, a] = 1$ и, следовательно, $(xa)^2 = 1$, что невозможно по доказанному. Тогда $[z, x] = a^2$ и $\langle z, x \rangle$ — группа кватернионов. Так как $[\langle x \rangle, N_G] \leq N_G \bigcap \langle z, x \rangle = \langle a^2 \rangle$, нетрудно проверить, что N_G содержит элемент y такой, что $|xy| = 2$. Поэтому $x \in \omega(G)$, вопреки его выбору. Итак, в этом случае $\omega(G)$ содержит все элементы порядка 4 из G, и потому $\overline{\omega(G)} = \omega(\bar{G})$.

Далее рассмотрим каждый из указанных для подгруппы C случаев отдельно.

Пусть $C = \langle z \rangle, |z| = 4$. Из последнего замечания следует, что $\bar{G}$ циклична или является кватернионной 2-группой. Но тогда вопреки условию, $z \in Z(G)$.

Пусть $C = \langle x, y \rangle$ — группа кватернионов порядка 8. По доказанному в фактор-группе $\bar{G} = G/N_G$ $\overline{\omega(G)} = \omega(\bar{G})$. Покажем, что $\bar{C} = \bar{G}$. В самом деле, пусть $\bar{z} \in \bar{G}, |\bar{z}| = 4$. Тогда, $\bar{z}^2 = \bar{x}$ и $[\bar{z}, \bar{y}] = 1$. Переходя к прообразам, положим $[z, y] = a^m b^n$. Тогда $(zy)^2 = x a^{m+2} b^n$. Так как $[\langle z \rangle, N_G] \leq \langle a \rangle$, то $[z, b] = a^t$. При $(t, 2) = 1, |zb| = 4$ и $z \in \omega(G)$, вопреки его выбору. Следовательно, $[z, N_G] \leq \langle a^2 \rangle$. Итак, $[\langle (zy)^2 \rangle, N_G] = 1$, откуда $n \equiv m \equiv 0 (mod 2)$. Но в таком случае, $[z, y] = a^{2s}, [z^2, y] = [x, y] = 1$, что невозможно. Итак, $\omega(G) = G$ и G, вопреки допущению, является $\overline{H}_2$-группой.

Пусть $C = \langle x, y \rangle$ — кватернионная 2-группа, $|x| = 2^k > 4$. Тогда в фактор-группе $\bar{G} = G/N_G$ подгруппа $\langle \overline{x^{2^{k-3}}} \rangle$ инвариантна, так как является характеристической подгруппой группы $\langle \bar{x} \rangle$. Следовательно, $\bar{G} = C_{\bar{G}}(\langle \overline{x^{2^{k-3}}} \rangle) \langle \bar{y} \rangle = \langle \bar{z} \rangle \lambda \langle \bar{y} \rangle$, причем $\overline{y^{-1}} \bar{z} \bar{y} = \overline{z^{-1}} \overline{z^{2^{s-1} l}}$, где $|\bar{z}| = 2^s$. Если $l \neq 1$, то $\bar{G} = \omega(\bar{G})$, и норма нециклических подгрупп группы G отлична от N_G.

Учитывая, что $[z, N_G] \leq \langle a \rangle$, нетрудно показать, что в смежном классе zN_G найдется элемент z_1 такой, что $|z_1| = |z|, z_1^2 \in C$. Тогда $z_1^2 = x$ и $y^{-1} z_1 y = z_1^{-1} z_1^{2^{s-1}} a^m b^n, z_1^{2^s} = a^2$. Так как $y^{-1} z_1^2 y = z_1^{-2} = z_1^{-2} a^{m+2} b^n a^r$, где $[z_1, a^m b^n] = a^r$, то $n \equiv 0 (mod 2)$, откуда $r \equiv 0 (mod 2)$ и $m \equiv 0 (mod 2)$. С другой стороны, $y^{-2} z_1 y^2 = z_1 z_1^{2^s} a^{4m} = z_1$, следовательно, $z_1^{2^s} = 1$, что невозможно.

Итак, $|C| = 2$ и $\omega(G) = N_G$. Так как $\langle a \rangle \triangleleft G, [G : C_G(\langle a \rangle)] = 2$, то $G = C_G(\langle a \rangle) \langle b \rangle$. Поскольку подгруппа $C_G(\langle a \rangle)$ имеет единственную инволюцию, то она циклична, $C_G(\langle a \rangle) =$

$\langle x\rangle$ и $[x,b] \leq C_G(\langle a\rangle)\bigcap N_G = \langle a^2\rangle$. Следовательно, $x^2 = a, [x,b] = x^2$, и G — группа типа 7) при $m = 1$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle, |a| = 4, |b| = 4, [a,b] = a^2$, то G — группа типа 5) теоремы.*

Доказательство. Допустим, что $\omega(N_G) \not\subset Z(G)$. Тогда $a^2 \in Z(G)$ и $b^2 \notin Z(G)$. Поскольку $\omega(N_G) \lhd G$, то $C = C_G(\omega(N_G)) \lhd G, [G:C] = 2$ и $G = C\langle d\rangle, d^2 \in C$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G_1} = N_G\langle d\rangle/\omega(N_G)$. Если $\langle\bar{d}\rangle\bigcap\overline{N_G} = \bar{E}$, то $G_1^/ \leq \omega(N_G)$. Тогда $[b^2,d] = 1$, вопреки выбору элемента d. Следовательно,$\langle\bar{d}\rangle\bigcap\overline{N_G} \neq \bar{E}$. Из условия $\langle\bar{d}\rangle\lhd\overline{G_1}$ заключаем, что $\langle\bar{d}\rangle\bigcap\overline{N_G} = \langle\bar{a}\rangle$. Поэтому $[\bar{b},\bar{d}] \in \langle\bar{a}\rangle$ и, как нетрудно проверить, снова $[b^2,d] = 1$. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен. Таким образом, $\omega(N_G) \leq Z(G)$, и в силу предложения 3, $\omega(N_G) = \omega(G)$.

Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий подгруппе N_G. Тогда $x^2 \in N_G$ и $|x| > 2$. Положим $x^2 = a^n b^m$. Из условия $\langle x\rangle\omega(N_G) \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G$ следует, что $\langle x^2\rangle \lhd G_1$, поэтому $m \equiv 0(mod2)$. Покажем, что и $n \equiv 0(mod2)$. Допустим противное. Тогда в силу предложения 2 $\langle\bar{x}\rangle \lhd \overline{G_1} = G_1/\omega(G)$ и $\overline{G_1^/} \leq \langle\bar{a}\rangle$. Если $\overline{G_1^/} = \bar{E}$, то $[x,b] \in \omega(G)$ и $[x^2,b] = 1$, что невозможно. Поэтому $\overline{G_1^/} = \langle\bar{a}\rangle$ и $|\overline{bx}| = 2$. Но тогда $\bar{b} \notin N_{\bar{G}}(\langle\overline{bx}\rangle)$, вопреки предложению 2. Следовательно, $n \equiv 0(mod2)$ и для любого элемента $x \in G, |x| = 2^k > 2, N_G\bigcap\langle x\rangle \leq \omega(G)$.

Пусть $\bar{A}$ — максимальная элементарная абелева подгруппа группы $\bar{G} = G/N_G$ и $\overline{x,y}$ — произвольные элементы из $\bar{A}$. По доказанному $x^2, y^2 \in \omega(G)$ и $[x^2,y] = [x,y^2] = 1$. Положим $[x,y] = a^r b^t$. Тогда $(xy)^2 = a^r b^t z$, где $z \in \omega(G)$ и поэтому $r \equiv t \equiv 0(mod2)$. Таким образом, для любых элементов $x,y \in A$, где A — полный прообраз подгруппы $\bar{A}$, имеет место включение $[x,y] \in \omega(G)$, и потому $A^/ \leq \omega(G)$. Учитывая, что каждая абелева нециклическая подгруппа из A содержит нижний слой $\omega(G)$, заключаем, что $A - \overline{HA_2}$ - группа экспоненты 4. Из описания таких групп (см. [6], теорема 3.1) следует, что $|\bar{A}| \leq 4$.

Далее рассмотрим два случая в зависимости от порядка максимальной абелевой подгруппы $\bar{A}$ из $\bar{G} = G/N_G$.

1. Пусть $|\bar{A}| = 2$. Из нильпотентности группы $\bar{G}$ следует, что $Z(\bar{G}) \neq 1$, поэтому $\bar{G}$ имеет единственную инволюцию. По теореме 12.5.2 из [5], $\bar{G}$ является циклической или кватернионной 2-группой.

Если фактор-группа $\bar{G} = G/N_G$ циклична, то $G = \langle x\rangle N_G$ и $G^/ \leq \omega(G)$. Отсюда $x^2 \in Z(G)$ и G является $\overline{HA_2}$-группой, так как каждая абелева нециклическая подгруппа из G содержит $\omega(G)$. Применяя теорему 3.1 из [6], заключаем, что $G = \langle y\rangle\lambda H$, где H — группа кватернионов, $|y| = 4, [\langle y\rangle, H] = \langle y^2\rangle$. Нетрудно убедиться, что нециклическая норма такой группы гамильтонова, вопреки условию.

Пусть теперь $\bar{G}$ — кватернионная 2-группа. Тогда она содержит группу кватернионов $\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$ порядка 8. Переходя к прообразам, положим $y^2 = x^2 a^m b^s$. Учитывая $[\langle y\rangle, N_G] \leq \langle y\rangle\omega(G)\bigcap N_G = \omega(G)$, получим $[\langle y^2\rangle, N_G] = 1$. Аналогично убеждаемся, что $[\langle x^2\rangle, N_G] = 1$. Тогда $m \equiv s \equiv 0(mod2)$ и $x^2 \in Z(G)$, что невозможно.

2. Пусть максимальная элементарная абелева подгруппа $\bar{A} \leq \bar{G}$ имеет порядок 4, $\bar{A} = \langle\bar{x}\rangle \times \langle\bar{y}\rangle$. Если $\bar{A} = \bar{G}$, то $G^/ \leq \omega(G)$ и $G - \overline{HA_2}$-группа порядка 64 и экспоненты 4. Из описания таких групп (теорема 3.1 из [6]) и учитывая, что $G \neq N_G$, делаем вывод, что G — группа типа 5) теоремы при $n = 2$.

Пусть $\bar{A} \neq \bar{G}$. Обозначим $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{A})$. Тогда $\bar{N} \neq \bar{A}$ и $[\bar{N} : C_{\bar{N}}(\bar{A})] = 2$. Не нарушая общности, будем считать, что $\bar{x} \in C_{\bar{N}}(\bar{A})$, и покажем, что $\bar{N}$ — группа диэдра порядка 8. Действительно, группа $C_{\bar{N}}(\bar{A})$ не содержит нециклических абелевых подгрупп порядка

8, так как полный прообраз такой группы является $\overline{HA_2}$-группой, вопреки теореме 3.1 из [6]. Следовательно, $C_{\bar N}(\bar A) = \bar A$ и, так как $\bar N = C_{\bar N}(\bar A)\langle\overline{x_1}\rangle$, где $\overline{x_1^2} \in C_{\bar N}(\bar A)$, то $\bar N = \langle\overline{x_2}\rangle\lambda\langle\bar y\rangle, |\overline{x_2}| = 4$.

Положим $\overline{N_1} = N_{\overline{G}}(\langle\overline{x_2}\rangle)$. Так как $[\overline{N_1} : C_{\overline{N_1}}(\langle\overline{x_2}\rangle)] = 2$, то $\overline{N_1} = C_{\overline{N_1}}(\langle\overline{x_2}\rangle)\lambda\langle\bar y\rangle$, где $C_{\overline{N_1}}(\langle\overline{x_2}\rangle)$ — циклическая подгруппа. Поэтому $\overline{N_1} = \langle\bar z\rangle\lambda\langle\bar y\rangle, \overline{x_2} \in \langle\bar z\rangle$. По теореме 12.5.1 из [5] $\overline{N_1^{/}} = \langle\overline{z^2}\rangle$, следовательно, $\langle\overline{x_2}\rangle$ — характеристическая подгруппа группы $\overline{N_1}$. Пусть $\overline{N_2} = N_{\overline{G}}(\overline{N_1})$. Тогда $\langle\overline{x_2}\rangle \lhd \overline{N_2}$ и $\overline{N_2} \leq N_{\overline{G}}(\langle\overline{x_2}\rangle) = \overline{N_1}$. Последнее возможно лишь при условии, что $\overline{N_1} = \bar G = \langle\bar z\rangle\lambda\langle\bar y\rangle, |\bar z| = 2^k > 2, |\bar y| = 2, \overline{y^{-1}}\bar z\bar y = z^{-1+2^{k-1}t}, t \in \{0, 1\}$.

Покажем, что $t = 0$. Отметим прежде всего, что для произвольного элемента $g \in \langle z, y\rangle, |g| \geq 8$ справедливы соотношения $[g^2, N_G] = 1$ и $\langle g\rangle \bigcap N_G = \langle a^2b^2\rangle$. Пусть $z_1 = z^{2^{k-1}}$. Положим $y^{-1}zy = z^{-1}z_1a^mb^n$, где z и y — прообразы элементов $\bar z$ и $\bar y$ соответственно. Поскольку $|z| > 8$, то $|zy| = 8$ и $(zy)^4 = a^2b^2 = a^2b^2a^{2n+2mn}b^{2m}$. Отсюда ввиду доказанного ранее, $n \equiv m \equiv 0(mod2)$ и $y^{-1}zy = z^{-1}z_1a_1$, где $a_1 \in \omega(G)$. Пусть $[z_1, y] = a_2, a_2 \in \omega(G)$. Учитывая, что $y^2 \in \omega(G)$, получим $y^{-2}zy^2 = za_2 = z$, откуда $a_2 = 1$ и $z_1 \in Z(G)$, что невозможно. Таким образом, $\overline{y^{-1}}\bar z\bar y = \overline{z^{-1}}$.

Переходя к прообразам, положим $y^{-1}zy = z^{-1}a^lb^s$. Тогда из условий $\langle zy\rangle \bigcap N_G \leq \omega(G)$ и $(zy)^2 = y^2a^lb^s \in N_G$ следует, что $l \equiv s \equiv 0(mod2)$. Рассмотрим фактор-группу $\tilde G = G/\langle z^2\rangle \cong (\langle\tilde z\rangle\tilde N_G)\langle\tilde y\rangle, \tilde y^2 \in \tilde N_G$. Очевидно, всегда можно считать, что $|\tilde y| = 2$. В самом деле, пусть $\tilde g \in \tilde N_G, |\tilde g| = 4$ и $[\tilde g, \tilde y] = 1$. Так как $|\tilde y\tilde g| = 2$, то вместо $\tilde y$ можно взять элемент $\tilde y\tilde g$. Пусть $[\tilde z, \tilde y] \neq 1$, тогда $[\tilde z, \tilde y] = \tilde{a^2} \in \tilde N_G$ и $\tilde H = \langle\tilde z, \tilde y\rangle$ — группа диэдра. Учитывая, что $\tilde H \lhd \tilde G, [\tilde H, \tilde G] \leq \langle\tilde{a^2}\rangle$ и применяя лемму 1 работы [7], получим $\tilde G = \tilde H C_{\tilde G}(\tilde H)$. Не нарушая общности, можно считать, что $\tilde N_G \leq C_{\tilde G}(\tilde H)$. Тогда $[H, N_G] \leq N_G \bigcap\langle z^2\rangle = \langle a^2b^2\rangle$.

Так как $[\tilde z, \tilde y] = \tilde{a^2}$, то переходя к прообразам, положим $y^{-1}zy = z^{-1}a^2(a^2b^2)^m$ и поскольку $y^2 = a^2b^2$, то $(zy)^2 = y^2a^{2+2m}b^{2m} = a^{2m}b^{2m+2}$. Пусть $m = 1$, тогда $(zy)^2 = a^2$. Так как $[zy, a] \in \langle a^2b^2\rangle$, то либо $|zya| = 2$, что противоречит предложению 3, либо $\langle zya, z^{2^{k-1}}\rangle$ — группа кватернионов. Это также невозможно, поскольку $b \notin N_G(\langle zya, z^{2^{k-1}}\rangle)$. Итак, $m = 0$. Тогда $(zy)^2 = b^2$, и если $[zy, b] = 1$, то $|zyb| = 2$, вопреки доказанному выше. Поэтому $[zy, b] \neq 1$, $[zy, b] = a^2b^2$ и $\langle zyb, z^{2^{k-1}}\rangle$ — группа кватернионов. Так как $a \notin N_G(\langle zyb, z^{2^{k-1}}\rangle)$, то снова имеем противоречие. Следовательно, $[\tilde z, \tilde y] = 1$ и $y^{-1}zy = z^{-1}(a^2b^2)^m$. Поскольку при $m \neq 0 (yz)^2 = 1$, то $y^{-1}zy = z^{-1}$ и $\langle y, z\rangle$ — кватернионная 2-группа. Учитывая недедекиндовость нормы N_G и инвариантность подгруппы $\langle y, z\rangle$ в G, заключаем, что $G = (\langle z\rangle \times \langle a, z^{2^{k-1}}b\rangle)\langle y\rangle, |z| = 2^{k+1} \geq 8, |y| = 4, [b, z] = [a, z] = [y, a] = [y, b] = 1$ и G — группа типа 5) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle, |a| = 2^n, n > 2, |b| = 2^m, m \geq 2, n \geq m, [a, b] = a^{2^{n-1}}$ и $\omega(N_G) \subseteq Z(G)$, то $m > 2$ и G — группа типа 6) теоремы.*

Доказательство. Пусть x — элемент наименьшего порядка группы G, не принадлежащий подгруппе N_G. Тогда $x^2 \in N_G$, и в силу предложения 3, $|x| > 2$. Положим $x^2 = a^kb^l$ и допустим, что $x^2 \in Z(N_G)$. Тогда в группе $G_1 = \langle x\rangle N_G$ из условий $[\langle x\rangle, N_G] \leq \langle x^2\rangle\omega(N_G) \leq Z(G_1)$ и $[\langle x^2\rangle, N_G] = 1$ следует, что $G_1^{/} \leq \omega(N_G)$. Поскольку каждая абелева нециклическая подгруппа группы G_1 содержит $\omega(N_G)$, то G_1 является $\overline{HA_2}$-группой. Используя описание таких групп (см.теорему 3.1 из [6]), приходим к противоречию. Следовательно, $x^2 \notin Z(N_G)$.

Покажем, что $(k, 2) = 1$. Действительно, если $n \leq m + 1$, то это следует из условий $x^2 \notin Z(N_G)$ и $\langle x^2\rangle \lhd N_G$. Пусть $n > m + 1$. Предположим, что $(k, 2) \neq 1$. Тогда $x^2 = a^{2k_1}b^l$, где $(l, 2) = 1$. Так как $G_1^{/} \leq \langle x^2\rangle\omega(N_G)$, то для произвольного элемента $\bar z$ группы

$\overline{G_1} = G_1/\omega(N_G)[\overline{x^2}, \bar{z}] = [\bar{x}, \bar{z}]^2 = 1$. Значит $|\overline{G_1^{/}}| = 2, \overline{G_1^{/}} \leq \langle \overline{a^{2^{n-2}}} \rangle$, и потому $G_1^{/} \leq \langle a^{2^{n-2}}, b^{2^{m-1}} \rangle \leq Z(G_1)$. Положим $y = xa^{-k_1}$. Так как $\langle y \rangle \omega(N_G) \triangleleft G_1$, то $\langle y^2 \rangle \triangleleft G_1$. С другой стороны, $y^2 = (xa^{-k_1})^2 = b^l a^{2^{n-2}t} z$, где $z \in \omega(N_G), (l,2) = 1$ и $a \notin N_{G_1}(\langle y^2 \rangle)$. Следовательно, $x^2 = a^k b^l$, где $(k,2) = 1$.

Пусть $\omega_m(N_G)$ — подгруппа нормы N_G, порожденная всеми элементами из N_G, порядок которых не превышает 2^m. Если $n > m$, то из доказанного следует, что фактор-группа $G/\omega_m(N_G) = \tilde{G}$ имеет единственную инволюцию. Покажем справедливость этого предложения при $n = m$.

Допустим, что содержит элементарную абелеву подгруппу $\langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{y} \rangle$ порядка 4. Тогда, в силу предыдущих рассуждений, $x^2 = a^{k_1} b^{2l_1}, y^2 = a^{k_2} b^{2l_2}, (k_1, 2) = (k_2, 2) = 1$. Нетрудно убедиться, что $[y, a] \in \omega(N_G), [y, b] \in \langle a^{2^{m-2}k} \rangle \omega(N_G)$. Пусть $[x, y] = a^r b^q$. Так как $[x, y^2] \in \omega(N_G)$, то $y^{-2} x y^2 = x a^{2r} b^{2q} a^{2^{m-2}kqs} z_1$, где $z_1 \in \omega(N_G)$, следовательно $2r + 2^{m-2}kqs \equiv (mod 2^{m-1})$ и $2q \equiv 0 (mod 2^{m-1})$. Учитывая, что $m > 2$, получим $q \equiv 0 (mod 2)$ и $r \equiv 0 (mod 2)$. Отсюда, $[x, y] = a^{2r_1} b^{2q_1}$ и $(xy)^2 = y^2 x^2 a^{2r_1} b^{2q_1} z = a^{k_1 + k_2 + 2r_1} b^{2(l_1 + l_2 + q_1)} z_1 \in Z(N_G)$, где $z, z_1 \in \omega(N_G)$, что противоречит доказанному. Таким образом, группа $G/\omega_m(N_G) = \tilde{G}$ содержит единственную инволюцию, и по теореме 12.5.1 из [5], является циклической или кватернионной 2-групой.

Далее будем рассматривать два случая в зависимости от порядков элементов a и b.

1. Пусть $n > m$. Покажем, что группа $\tilde{G}$ циклична. Действительно, иначе она содержит группу кватернионов $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ порядка 8, причем ввиду доказанного $\tilde{x^2} = \tilde{y^2} \in N_G$ и потому $[N_G : \omega_m(N_G)] = 2$. Положим $x^2 = a^k b^l, y^2 = x^2 a^{2t} b^q$. Тогда $y^{-1}xy = x x^2 a^{2s} b^r = x a^{2s+k} b^{l+r}$ и учитывая, что $[\langle y \rangle, N_G] \leq \langle y \rangle \omega(G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle y^4 \rangle \omega(G)$ и $[\langle y^2 \rangle, N_G] \leq \omega(G)$, получим $[\langle y \rangle, N_G] \leq \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(G)$. Аналогично убеждаемся, что $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle a^{2^{n-2}} \rangle \omega(G)$, поэтому $[x, y^2] = a^{2^{n-2}t} z$, где $z \in \omega(N_G)$. С другой стороны, $y^{-2} x y^2 = x a^{2k+4s} b^{2(l+r)} a^{2^{n-2}(k+r+l)t_1} z_1 = x a^{2k+4s+2^{n-2}(k+r+l)t_1} b^{2(l+r)} z_2$, где $z_1, z_2 \in \omega(N_G)$. Следовательно, $k + 2s \equiv 0 (mod 2^{n-3})$. Поскольку $(k, 2) = 1$ и $n > 2$, то $n = 3$ и $m = 2$. Но в таком случае $[\langle x \rangle, N_G] \leq \omega(G)$ и $[\langle y \rangle, N_G] \leq \omega(G)$. Значит, $y^{-2} x y^2 = xz = x a^{2k+4s} b^{2(l+r)} z_1, 2k + 4s \equiv 0 (mod 4)$ и $k \equiv 0 (mod 2)$. Противоречие показывает, что этот случай невозможен. Таким образом, фактор-группа $G/\omega_m(N_G) = \tilde{G}$ циклична и $G = \langle x \rangle \omega_m(N_G), x^{2^r} = a^k b^l, (k, 2) = 1$.

Поскольку $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle x^{2^{r+n-m}} \rangle \omega(G) \leq Z(G)$, то из $[x, b^{2^{m-1}}] = 1$ следует, что $[x^{2^{m-1}}, b] = 1$. Учитывая, что $[x, x^{2^r}] = 1 = [x, a^k b^l] = [x, a^k][x, b^l]$, получим $[x^{2^{m-1}}, a] = 1$. Следовательно, $x^{2^{m-1}} \in Z(G)$ и $G^{/} \leq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_{m-1}(N_G) = \langle (a^k b^l)^{2^{n-m+1}} \rangle \omega(G)$.

Так как $x^{2^{r+1}}$ — наименьшая степень элемента x, содержащаяся в центре подгруппы N_G, то $m - 1 \geq r + 1$. Следовательно, $r \leq m - 2$, и потому $m \geq 3$. Так как $[x^{2^r}, b] = a^{2^{n-1}k} = [x, b]^{2^r} = (a^{2^{n-m+1}k} b^{2^{n-m+1}l})^{2^r s}$, то $2^{n-m+1+r} ks \equiv 0 (mod 2^{n-1})$. Учитывая, что $m - r \geq 2$ и $(k, 2) = 1$, получим $s = 2^{m-r-2} s_1$. Таким образом, $[x, b] = (a^k b^l)^{2^{n-r-1} s_1} b^{2^{n-1}t} = x^{2^{n-1} s_1} b^{2^{m-1}t}$, причем $(s_1, 2) = 1, t \in \{0, 1\}$. Наконец, учитывая перестановочность подгрупп $\langle x \rangle$ и $\langle b \rangle$, заключаем, что $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$ — группа типа 6) теоремы.

2. Пусть $m = n > 2$. Покажем, что фактор-группа $G/N_G = \tilde{G}$ не содержит подгруппу кватернионов $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$. Пусть x, y — прообразы элементов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ соответственно. Тогда $x^2 = y^2 a^r b^q$ и $y^{-1}xy = x x^2 a^s b^t$. Элементарная проверка показывает, что $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle a^{2^{m-3}k} b^{2^{m-2}l} \rangle \omega(G)$, где $x^4 = a^k b^{2l}, (k, 2) = 1$. Поэтому $[y, x^2] = [y, y^2 a^r b^q] = [y, a^r b^q] \in \langle a^{2^{m-3}k} b^{2^{m-2}l} \rangle \omega(G)$.

Рассмотрим фактор-группу $G/\omega_2(N_G) = \bar{G}$, где $\omega_2(N_G)$ — подгруппа, порожденная элементами, порядок которых не превышает 4 из N_G. Нетрудно убедиться, что $[\bar{y}, \bar{a}] = 1, [\bar{y}, \bar{b}] = \overline{a^{2^{m-3}ks_1}}, [\bar{y}^2, \bar{x}] = \overline{a^{2^{m-3}t_1}}, [\bar{y}, \bar{x}^2] = \overline{a^{2^{m-3}s_2}}$. Поэтому $\overline{y^{-2}} \bar{x} \overline{y^2} =$

$\overline{\bar{x}x^4a^{2^{m-3}(s_2+ks_1t)+2s}b^{2t}} = \overline{\bar{x}a^{2^{m-3}(s_2+ks_1t)+2s+k}b^{2t+2l}} = \overline{\bar{x}a^{2^{m-3}t_1}}$. Если $m \neq 3$, то $(k,2) \neq 1$. Пусть $m = 3$. В таком случае $[\bar{x}, \overline{N_G}] = [\bar{y}, \overline{N_G}] = 1[\bar{x}, \overline{y^2}] = [\overline{x^2}, \bar{y}] = 1, \overline{y^{-2}xy^2} = \overline{\bar{x}a^{2s+k}b^{2t+2l}} = \bar{x}$ и потому $(k,2) \neq 1$, вопреки доказанному.

Следовательно, фактор-группа $G/N_G = \tilde{G}$ циклична и $G = \langle x \rangle N_G = \langle x, b \rangle$, где $x^{2^r} = a^k b^{2l}, (k,2) = 1$. Учитывая, что $G^{/} \leq \langle x^{2^r} \rangle \omega(G)$, положим $[x,b] = (a^k b^{2l})^s b^{2^{m-1}t}$. Тогда, так как $b^{2^{m-1}} \in Z(G)$ и $m > 2$, получим $[b^{2^{m-1}}, x] = a^{2^{m-1}ks}$. Следовательно, $(ks,2) \neq 1$ и $s = 2s_1$. Поэтому $[x,b] \in Z(G)$ и $[x^{2^{m-1}}, b] = 1$. Нетрудно показать, что $[x^{2^{m-1}}, a] = 1$ и потому $x^{2^{m-1}} \in Z(G)$. Так как $x^{2^{r+1}}$ — наименьшая степень элемента x, содержащаяся в $Z(N_G)$, то $r \leq m-2$. Из $[x^{2^r}, b] = a^{2^{m-1}k} = [x,b]^{2^r} = (a^{2ks}b^{4ls})^{2^r}$ следует, что $2^{1+r}ks \equiv 0 (mod 2^{m-1})$, и поскольку $m-1 \geq r+1$, то $s = 2^{m-r-2}s_1$ и $[x,b] = (a^k b^{2l})^{2^{m-r-1}s_1} b^{2^{m-1}t}$, где $(s_1, 2) = 1, t \in \{0,1\}$. Итак, $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$ — группа типа 6) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если конечная 2-группа G имеет нециклическую норму $N_G \neq G$, где $N_G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, |a| = 2^n, n > 2, |b| = 2^m, m \geq 2, n \geq m, [a,b] = a^{2^{n-1}}$ и $\omega(N_G) \not\subset Z(G)$, то G — группа типа 7) теоремы.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(\omega(N_G))$. Тогда $C \triangleleft G, [G:C] = 2$ и $G = C\langle x \rangle$, где $x^2 \in C$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle x \rangle N_G$. Если $|x| = 2$, то $[N_G, \langle x \rangle] \leq \langle x, a^{2^{n-1}} \rangle \bigcap N_G = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и $[b^{2^{m-1}}, x] = 1$, вопреки выбору элемента x. Следовательно, $|x| > 2$. Пусть x^{2^r} — наименьшая степень элемента x, принадлежащая N_G. Положим $x^{2^r} = a^k b^l$. Если $x^{2^r} \in Z(N_G)$, то из доказательства леммы 5 следует, что $r = 1$ и $x^2 = a^{2k_1}b^{2l_1}$. Поскольку $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle x, b^{2^{m-1}} \rangle \bigcap N_G = \langle x^2, b^{2^{m-1}} \rangle$ и $[\langle x^2 \rangle, N_G] = 1$, то $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle a^{2^{n-2}k_1 s} b^{2^{m-1}l_1 s} \rangle \omega(N_G)$, откуда $|b| = 4$. Перейдем к фактор-группе $\bar{G} = G/\omega(N_G)$. Тогда $[\bar{x}, \bar{a}] \in \langle \overline{a^{2^{n-2}}} \rangle$ и $\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$ имеет циклическую подгруппу индекса 2. Если $\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$ — абелева группа, то $|\overline{\bar{x}a^{-k_1}}| = 2, \langle \overline{\bar{x}a^{-k_1}} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$ поэтому $[\bar{x}, \bar{b}] = [\overline{\bar{x}a^{-k_1}}, \bar{b}] \in \langle \overline{\bar{x}a^{-k_1}} \rangle \bigcap \overline{N_G} = 1$ и $[x,b] \in \omega(G)$. Допустим, что $\langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$ — неабелева группа. Тогда, если $[\bar{x}, \bar{b}] \neq 1$, то $[\bar{x}, \bar{b}] = \overline{a^{2^{n-2}}}$ и $|\overline{xb}| = 2$. Учитывая инвариантность подгруппы $\langle \overline{xb} \rangle$ в $\overline{G_1}$ и соотношение $[\bar{x}, \bar{b}] = [\overline{xb}, \bar{b}] \in \langle \overline{xb} \rangle \bigcap \overline{N_G} = 1$, снова получим $[x,b] \in \omega(G)$. Отсюда $[x, b^2] = 1$, что противоречит выбору элемента x. Следовательно, $\langle x \rangle \bigcap N_G \not\subset Z(N_G)$. Нетрудно убедиться также, что $x^{2^r} = a^k b^l, (k,2) = 1$.

Пусть $n = m$. Тогда $x^{2^r} = a^k b^{2l}$ и $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle x, b^{2^{m-1}} \rangle \bigcap N_G = \langle x^{2^r}, b^{2^{m-1}} \rangle$. Положим $[x,b] = x^{2^r s} b^{2^{m-1}t}$. Тогда из условия $[x, b^{2^{m-1}}] \neq 1$ следует, что $(s,2) = 1$. Так как $x^{2^{r+1}}$ — наименьшая степень элемента x, принадлежащая $Z(N_G)$, то из равенства $[x^{2^m}, b] = 1$ заключаем, что $m \geq r+1$. Более того, $r = m-1$, поскольку в противном случае $[x^{2^r}, b] \neq a^{2^{m-1}k}$. Учитывая соотношения $|C/N_G| \leq 2^{m-2}, |G/C| = 2, |G/N_G| \leq 2^{m-1}$ и $|\langle x \rangle N_G| = 2^{m-1}$, заключаем, что G/N_G — циклическая группа с образующим элементом xN_G. Таким образом, $G = \langle x \rangle N_G = \langle x \rangle \langle b \rangle, x^{2^{m-1}} = a^k b^{2l}, (k,2) = 1, [x,b] = x^{2^{m-1}s} b^{2^{m-1}t}, (s,2) = 1, t \in \{0,1\}$ — группа типа 7) теоремы.

Пусть $n > m \geq 2$. Тогда $x^{2^r} = a^k b^l, (k,2) = 1$ и $[\langle x \rangle, N_G] \leq \langle x \rangle \omega(N_G) \bigcap \omega_m(N_G) = \langle x^{2^{r+n-m}} \rangle \omega(N_G)$. Положим $[x,b] = (a^k b^l)^{2^{n-m}s} b^{2^{m-1}t}$. Покажем, что и в этом случае $(s,2) = 1$. Действительно, иначе $[x, b^{2^{m-1}}] = 1 \neq a^{2^{n-1}k}$. Оценим порядок элемента x. Так как $[x^{2^m}, b] = 1$ и $x^{2^{r+1}}$ — наименьшая степень элемента x, принадлежащая $Z(N_G)$, то $r+1 \leq m$ и $r \leq m-1$. Наконец, учитывая, что $[x^{2^r}, b] = a^{2^{n-1}k}$, получаем $r = m-1$. Поскольку $|G/N_G| \leq 2^{m-1}$ и $|\langle x \rangle N_G| = 2^{m-1}$, то $G = \langle x \rangle N_G = \langle x \rangle \langle b \rangle, [x,b] = x^{2^{k-m}s} b^{2^{m-1}t} = (a^k b^l)^{2^{n-m}s} b^{2^{m-1}t}, (s,2) = 1, t \in \{0,1\}$ и G — группа типа 7) теоремы. Лемма доказана. Теорема доказана.

Abstract. We study the finite 2-groups with non-Dedekind norm of the non-cyclic subgroups. Under this condition, a complete description of the finite 2-groups is obtained.

Литература

[1] R.Baer, *Der Kern, eine charakteristische Untergruppe*, Comp. Math., 1 (1934), 254–283.

[2] Ф.М. Лиман,*О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс*, Укр. мат. журн., 49:5,(1997), 678–684.

[3] Ф.М. Лиман,*Групи з інваріантними нециклічними підгрупами* Докл. АН УССР, 12,(1967), 1073–1075.

[4] Ф.Н Лиман,2-*группы с инвариантными нециклическими подгруппами.* Мат заметки, 4:1,(1968), 75–83.

[5] М. Холл,*Теория групп* М., Изд-во иностр. лит., 1962.

[6] Ф.Н. Лиман,*Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны* Группы с ограничениями для подгрупп, Киев: Институт математики АН УССР, 1971, 65–95.

[7] В.А. Шериев,*Конечные* 2-*группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами* Сиб. мат. журн, 8:1(1967), 195–213.

[8] А.Д. Устюжанинов,*Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами* Матем. Записки. — Уральск. Ун-т, 6:1, (1967), 107–128.

Сумской государственный педуниверситет
им. А.С. Макаренко
40002, Сумы, Украина

Поступило 23.03.2001