Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 05D10, 20K99

Раскраски абелевых групп без одноцветных подмножеств $g + X + X$

В.А.Васильева

Все рассматриваемые группы предполагаются абелевыми. Под *r-раскраской* групы G подразумевается произвольное отображение $\xi : G \to \{1, 2, \dots, r\}$.

По теореме Рамсея для произвольной r-раскраски бесконечной группы G найдется такое бесконечное подмножество X, что подмножество $PS(X) = \{x+y : x, y \in X, x \neq y\}$ одноцветно. Н.Хайндмен [1, стр. 139] указал 3-раскраску группы целых чисел $\mathbb{Z}$ без бесконечных одноцветных подмножеств $X+X$. Существует ли 2-раскраска $\mathbb{Z}$ без бесконечных одноцветных подмножеств $X+X$ — это известная проблема Овингса [2]. В статье [3] для произвольной группы без элементов порядка 2 указана 2-раскраска без бесконечных одноцветных подмножеств $g+X-X$. Если группа G содержит бесконечное число элементов порядка 2, то для любого конечного раскрашивания G найдется бесконечная подгруппа H периода 2, такая что некоторый смежный класс $g+H$ одноцветен [4].

В этой статье для широкого класса групп указаны раскраски без одноцветных бесконечных подмножеств $g+X+X$. Вначале изложим основные результаты работы.

Теорема 1. *Существует 3-раскраска свободной группы счетного ранга без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X$.

Теорема 2. *Существует 2-раскраска свободной группы счетного ранга без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X+X$.

Теорема 3. *Для счетной периодической группы без элементов порядка 2 существует 3-раскраска без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X$.

Теорема 4. *Пусть G — счетная периодическая группа без элементов порядка 2, $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G. Если $\pi(G)$ не содержит чисел $2^{2k+1}-1$, то существует 2-раскраска G без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X$.

Теорема 5. *Пусть G — счетная 2-группа с конечным числом элементов порядка 2. Тогда существует 2-раскраска G без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X$.

Теорема 6. *Пусть для подгруппы H группы G существует m-раскраска без бесконечных одноцветных подмножеств $g+X+X$, а для фактор-группы G/H существует аналогичная n-раскраска. Тогда существует mn-раскраска G без бесконечных одноцветных подмножеств* $g+X+X$.

Теорема 7. *Пусть G — бесконечная группа, n, r — натуральные числа. Для любой r-раскраски G найдутся такие подмножество $X \subset G$, $|X| = n$ и элемент $g \in G$, что подмножество $g+X+X$ одноцветно.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{g_1, g_2, \dots\}$ — множество свободных образующих группы G. Каждый элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = \sum_{i=1}^{\infty} k_i g_i$, где

$k_i \in \mathbb{Z}$, причем множество $\{i \in \mathbb{N} : k_i \neq 0\}$ конечно. Зафиксируем произвольную возрастающую последовательность $< \alpha_i >_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел и положим

$$||g|| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |k_i|$$

Заметим, что

$$||g_1 + g_2|| \leq ||g_1|| + ||g_2||, \ ||kg_1|| \leq |k| ||g_1||$$

для любых $g_1, g_2 \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, для каждого целого числа m множество $\{g \in G : ||g|| = m\}$ конечно.

Для натуральных чисел m, n, $m < n$ обозначим $[m, n) = \{x \in \mathbb{N} : m \leq x < n\}$. Положим

$$A_1 = \cup_{n=1}^{\infty}[3 \cdot 4^{n-1}, 5 \cdot 4^{n-1}), \ A_2 = \cup_{n=1}^{\infty}[5 \cdot 4^{n-1}, 8 \cdot 4^{n-1}), \ A_3 = \cup_{n=1}^{\infty}[8 \cdot 4^{n-1}, 12 \cdot 4^{n-1}).$$

Очевидно, что $\mathbb{N} = [1, 3) \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и подмножества A_1, A_2, A_3 попарно не пересекаются. Определим 3-раскраску χ группы G, полагая $\chi(g) = 1$, если $||g|| < 3$, и $\chi(g) = i$ тогда и только тогда, когда $||g|| \geq 3$ и $||g|| \in A_i$.

Упорядоченную тройку $g, g + d, g + 2d$ элементов группы G назовем 3-прогрессией с началом g. Покажем, что для каждого элемента $g \in G$, $||g|| \geq 3$ имеется конечное число одноцветных 3-прогрессий с началом g. Предположим, что $||g|| \in A_1$. Остальные варианты $||g|| \in A_2$, $||g|| \in A_3$ разбираются аналогично.

Пусть $||g|| \in [3 \cdot 4^{n-1}, 5 \cdot 4^{n-1})$, $||g + d|| \in [3 \cdot 4^{m-1}, 5 \cdot 4^{m-1})$ и $m > n + 1$. Достаточно убедится в том, что $||g + 2d|| \notin A_1$. Так как $||d|| \leq ||g + d|| + ||g|| \leq 5 \cdot 4^{m-1} + 5 \cdot 4^{n-1}$, то

$$||g + 2d|| \leq ||g + d|| + ||d|| \leq 2 \cdot 5cdot4^{m-1} + 5 \cdot 4^{n-1} = 4^m \cdot (2,5 + 5 \cdot 4^{n-1-m}) < 3 \cdot 4^m.$$

С другой стороны,

$$||g + 2d|| = ||2(g + d) - g|| \geq 2||g + d|| - ||g|| \geq$$

$$\geq 2 \cdot 3 \cdot 4^{m-1} - 5 \cdot 4^{n-1} = 4^{m-1} \cdot (6 - 5 \cdot 4^{n-m}) > 5 \cdot 4^{m-1}.$$

Следовательно, $||g + 2d|| \in (5 \cdot 4^{m-1}, 3 \cdot 4^m)$ и $||g + 2d|| \notin A_1$.

Наконец, предположим, что существует χ-одноцветное бесконечное подмножество $g + X + X$ группы G. Выберем произвольную последовательность $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ различных элементов из X так, чтобы $||g + 2x_1|| \geq 3$. Ясно, что $g + 2x_1$, $g + x_1 + x_n$, $g + 2x_n \in g + X + X$ для любого натурального числа n. Следовательно, имеется бесконечное семейство

$$\{g + 2x_1, (g + 2x_1) + (x_n - x_1), (g + 2x_1) + 2(x_n - x_1) : n \in \mathbb{N}\}$$

одноцветных 3-прогрессий с общим началом $g + 2x_1$, — противоречие. □

Доказательство теоремы 2. Норму $|| \cdot ||$ элементов группы G определим как в доказательстве теоремы 1. Положим $\chi(0) = 1$, и для каждого элемента $g \in G$, $g \neq 0$ выберем такое натуральное число m, что $2^{m-1} \leq ||g|| \leq 2^m$. Если m четно, то положим $\chi(g) = 1$, иначе $\chi(g) = 2$.

Зафиксируем произвольный элемент $g \in G$. Если норма элемента d достаточно большая, то среди элементов $g + d$, $g + 2d$, $g + 3d$ непременно найдутся разноцветные. Следовательно, имеется лишь конечное число χ-одноцветных 4-прогрессий g, $g + d$, $g + 2d$, $g + 3d$.

Предположим, что существует χ-одноцветное бесконечное подмножество $g + X + X + X$. Выберем произвольную последовательность $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ различных элементов подмножества X. Ясно, что

$$\{g + 3x_1, g + 2x_1 + x_n, g + x_1 + 2x_n, g + 3x_n\} \subseteq g + X + X + X$$

для любого натурального числа n. Следовательно, имеется бесконечное число χ-одноцветных прогрессий с общим началом $g + 2x_1$. $\square$

Для доказательства теорем 3,4 воспользуемся леммой де Брейна-Эрдеша в следующей форме [5]. Пусть X — произвольное множество, $f : X \to X$. *Орбитой элемента* $x \in X$ называется множество $O_f(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, \dots\}$. Орбита $O_f(x)$ называется *циклом длины* $k > 1$, если k — наименьшее натуральное число, такое что $f^k(x) = x$.

Существует 3-раскраска X без одноцветных пар x, $f(x)$, $x \neq f(x)$. Если все циклы имеют четную длину, то существует 2-раскраска X без одноцветных пар x, $f(x)$, $x \neq f(x)$.

Доказательство теоремы 3. Представим группу G в виде объединения возрастающей цепочки конечных подгрупп $G = \cup_{n=0}^{\infty} G_n$, $G_0 = \{0\}$. Для каждого натурального числа n рассмотрим отображение

$$f_n : G_n/G_{n-1} \to G_n/G_{n-1}, \ f_n(x) = 2x.$$

Пользуясь леммой де Брейна-Эрдеша, определим 3-раскраску χ_n фактор-группы G_n/G_{n-1} без одноцветных пар x, $2x$, $x \neq 0$. Для произвольного элемента $a \in G$, $a \neq 0$ выберем натуральное число n так, чтобы $a \in G_n \setminus G_{n-1}$, и положим $\chi(a) = \chi(a)$. Цвет $\chi(0)$ определим произвольно.

Зафиксируем произвольное бесконечное подмножество $X \subseteq G$ и элемент $g \in G$. Выберем элементы $x, y \in X$ так, чтобы

$$g, y \in G_{n-1}, \ x \in G_n \setminus G_{n-1}$$

для некоторого натурального числа n. Тогда

$$\chi(g + x + y) = \chi(x), \ \chi(g + 2x) = \chi(2x).$$

Так как элементы x, $2x$ разноцветны, то подмножество $g + X + X$ неодноцветно. $\square$

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим отображение f_n из доказательства предыдущей теоремы. По условию теоремы 4 орбита каждого ненулевого элемента из G_n/G_{n-1} является циклом четной длины. По лемме де Брейна-Эрдеша существует 2-раскраска χ_n фактор группы G_n/G_{n-1} без одноцветных пар x, $2x$, $x \neq 0$. По семейству раскрасок $\{\chi_n : n = 1, 2, \dots\}$ определим требуемую 2-раскраску χ группы G как и в доказательстве теоремы 3. $\square$

Доказательство теоремы 5. Для каждого неотрицательного целого числа n обозначим через X_n совокупность всех элементов группы G порядка 2^n. По условию теоремы все подмножества X_n конечны. Пусть $g \in G$ и $g \in X_n$. Положим $\chi(g) = 1$, если n нечетно, и $\chi(g) = 2$, если n четно.

Зафиксируем произвольное бесконечное подмножество $X \subseteq G$ и элемент $g \in G$. Выберем элементы $x, y \in X$ так, чтобы $|g| < |y| < |2x|$. Тогда

$$\chi(g + x + y) = \chi(x), \ \chi(g + 2x) = \chi(2x).$$

Так как элементы x, $2x$ разноцветны, то подмножество $g+X+X$ не является одноцветным.

$\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть χ_1 — m-раскраска подгруппы H без бесконечных одноцветных подмножеств $g+X+X$, а χ_2 – аналогичная n-раскраска фактор-группы G/H. Разложим группу G на смежные классы по подгруппе H

$$G=\cup\{g_\alpha+H:\alpha\in I\}.$$

Пусть $a\in G$, $a\in g_a+H$. Положим

$$\chi(a)=(\chi_1(a-g_\alpha),\chi_2(a+H))$$

и покажем, что χ — требуемая mn-раскраска группы G. Допустим противное и выберем χ-одноцветное бесконечное подмножество $g+X+X$. Поскольку фактор-группа G/H не содержит χ_2-одноцветных бесконечных подмножеств вида $g+Y+Y$, то найдется такое конечное подмножество $K\subseteq G$, что

$$g+(X+H)+(X+H)\subseteq K+H.$$

Значит, $X+H$ содержится в объединении конечного числа смежных классов по подгруппе H. Выберем бесконечное подмножество $X'\subseteq X$, которое содержится в одном смежном классе $b+H$. Тогда $g+X'+X'\subseteq g+2b+H$. Однако, подмножество $X'+X'-2b$ не может быть χ_1-одноцветным. Следовательно, $g+X'+X'$ не является χ-одноцветным, противоречие.

$\square$

Рассмотрим группу G без кручения конечного ранга n. Вложим G в прямую сумму H n копий группы рациональных чисел. Выделим в H цепочку подгрупп

$$\{0\}\subset H_1\subset H_2\subset H_3=H,$$

где H_1 — свободная группа ранга n, H_2/H_1 — прямая сумма n экземпляров квазициклических 2-групп, H_3/H_2 — периодическая группа без элементов порядка 2. Применяя теорему 6 вместе с теоремами 1, 5, 3, получаем конечную раскраску H (а следовательно, и G) без бесконечных одноцветных подмножеств $g+X+X$.

Доказательство теоремы 7. Если группа G содержит элемент бесконечного порядка, то по теореме ван дер Вардена найдется одноцветная арифметическая прогрессия

$$g,g+d,g+2d,\dots,g+2nd.$$

Положим $X=\{d,2d,\dots,nd\}$. Тогда $g+X+X$ — одноцветное подмножество. Если порядки конечных циклических подгрупп группы G неограничены в совокупности, то можно применить теорему ван дер Вардена в конечной форме: для любых натуральных чисел r,n найдется такое натуральное число M, что при любом r-раскрашивании множества $\{1,\dots,M\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины $2n+1$. Если группа G содержит бесконечную подгруппу конечного периода, то по теореме Грэхема-Либа-Росчайльда при любом r-раскрашивании G найдется одноцветный смежный класс по подгруппе порядка $\geq n$.

$\square$

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору И.В.Протасову за постоянное внимание к работе.

Abstract. For some classes of Abelian groups we construct the finite colorings of groups without infinite monochrome subsets of the form $g+X+X$.

Литература

[1] N.Hindman, *Ultrafilters and combinatorial number theory,* Lecture Notes in Math. 1979, V.751, P. 119–184

[2] J. Owings, *Problem E2494,* Amer. Math. Monthly, 1974, V.81, P. 902.

[3] I.V.Protasov, V.A.Vasil'eva, *Some new kinds of resolvability of Abelian groups,* Доп. НАН України 1999, N12, C.50–53.

[4] И.В.Протасов, *Абсолютно разложимые группы,* Укр. мат. ж, 1996, Т.48, N3, С.383–392

[5] Т.Л.Юрчук, *Хроматичні числа графів відображень та розбиття груп,* Доп. НАН України, 1997, N1, С. 8–10.

Киевский национальный университет имени Т.Шевченко

Поступило 23.03.2001