Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D20

D_π-теорема для конечных групп, композиционные факторы которых обладают силовскими 2-подгруппами ступени нильпотентности не выше двух

В.Н.Тютянов

В [1] В.Д.Мазуров и Д.О.Ревин доказали D_π-теорему для конечных групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами. В этой работе будет доказана справедливость D_π-теоремы для класса $Sl_2(2)$ конечных групп, композиционные факторы которых обладают силовскими 2-подгруппами ступени нильпотентности не выше двух. Понятно, что класс $Sl_2(2)$ включает в себя класс групп $SA(2)$, рассмотренный в [1].

В работе доказан следующий результат.

Теорема. *Для любого множества простых чисел π расширение D_π-группы, композиционные факторы которой обладают силовской 2-подгруппой ступени нильпотентности не выше двух, с помощью D_π-группы будет D_π-группой.*

Все группы предполагаются конечными. Будем придерживаться определений и обозначений из [1].

В силу теоремы 10.3.1 [2], класс $Sl_2(2)$ замкнут относительно подгрупп и гомоморфных образов. Из [3–5] следует, что простые группы из $Sl_2(2)$ исчерпываются следующим списком.

Группы с абелевой силовской 2-подгруппой:

$PSL(2, 2^n)$, $n > 1$;

$PSL(2, q)$, $q = p^n$, где p — простое число, и $q \equiv \pm 3 (mod 8)$;

${}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$;

J_1 — спорадическая группа Янко.

Группы с силовской 2-подгруппой ступени нильпотентности 2:

$PSL(2, q)$, $q = p^n$, где p — простое число и $q \equiv \pm 7 (mod 16)$;

A_7 — знакопеременная группа;

$Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$;

$PSU(3, 2^{2n})$, $n \geq 1$;

$PSL(3, 2^n)$, $n \geq 1$;

$PSp(4, 2^n)$, $n \geq 2$.

Лемма. *Пусть $2 \in \pi$. Тогда:*

1) $Sl_2(2)$ — D_π-нормальный класс;

2) любая простая D_π-подгруппа $R \in Sl_2(2)$ либо является π-группой, либо принадлежит некоторому классу Виландта относительно π.

Доказательство. Покажем, что любая простая группа $R \in Sl_2(2)$ удовлетворяет некоторому из условий D1–D3 теоремы 2 [1].

Предположим, что R является E_π-группой. Если $\pi(R) \subseteq \pi$, то выполнено условие D3. Таким образом, $\pi(R)$ не содержится в π. Так как $2 \in \pi(R) \cap \pi$, то R содержит собственную холлову π-подгруппу F.

Случай, когда силовская 2-подгруппа в R абелева, был рассмотрен в лемме 2 [1]. Рассмотрим все оставшиеся возможные случаи для R.

$R = PSL(2, q)$, $q = p^n$, где p — простое число и $q \equiv \pm 7 (mod 16)$.

Данный случай рассматривается точно так же, как случай $PSL(2, q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$ в лемме 2 [1].

$R = A_7$.

Доказательство следует из леммы 1 [1].

$R = Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$.

Максимальные подгруппы в R описаны в работе [6]. Из этого описания следует, что F содержится в группе Фробениуса порядка $q^2(q-1)$ с ядром порядка q^2, где $q = 2^{2n+1}$. Из [6] также следует, что R содержит диэдральную подгруппу порядка $2(q-1)$. Поэтому если $\pi(R) \cap \pi \neq \{2\}$, то в R имеется диэдральная подгруппа порядка $2p$, где $p \in (\pi \cap \pi(R)) \setminus \{2\}$ и выполняется условие D2 теоремы 2 [1]. Поэтому холлова π-подгруппа в R является 2-группой, а R принадлежит некоторому классу Виландта относительно π [7].

$R = PSU(3, 2^{2n})$, $n \geq 1$.

Так как группа F содержит силовскую 2-подгруппу группы R, то F содержится в некоторой собственной параболической подгруппе группы R (см. лемму 10 [8]). Параболические подгруппы в R исчерпываются борелевскими подгруппами B порядка $q^3(q^2-1)/(3, q+1)$ и являются группами Фробениуса с ядром порядка q^3, где $q = 2^n$ [9]. С другой стороны, группа R содержит подгруппу $A_1(q)$ с диэдральной подгруппой порядка $2(q-1)$. Если $\pi(R) \cap \pi \neq \{2\}$, то в R имеется диэдральная подгруппа порядка $2p$, где $p \in (\pi(R) \cap \pi) \setminus \{2\}$, и R удовлетворяет условию D2 теоремы 2 [1]. Поэтому холлова π-подгруппа в R является 2-группой, и R принадлежит некоторому классу Виландта относительно π [7].

$R = PSL(3, 2^n)$, $n \geq 1$.

Из леммы 10 [8] следует, что $F \leq P$, где P — некоторая максимальная параболическая подгруппа в R. Так как лиевский ранг R равен двум, то $\overline{P} = P/O_2(P) \cong SL(2, 2^n) = PSL(2, 2^n)$. По теореме Диксона (8.27 [9]), получим, что $\overline{F} = F/O_2(P)$ содержится в группе Фробениуса порядка $2^n(2^n-1)$ с ядром порядка 2^n. Пусть сначала $\pi \cap \pi(R) \neq \{2\}$, и $r \in (\pi \cap \pi(R)) \setminus \{2\} \neq \emptyset$. Тогда $\overline{P}$ содержит диэдральную подгруппу порядка $2r$ не изоморфную ни одной подгруппе из $\overline{F}$. Отсюда легко заключить, что R удовлетворяет условию D2 теоремы 2 [1]. Следовательно, $\pi \cap \pi(R) = \{2\}$ и холлова π-подгруппа в R является 2-группой. Из [7] следует, что R принадлежит некоторому классу Виландта относительно π.

$R = PSp(4, 2^n)$, $n \geq 1$.

Из леммы 10 [8] следует, что $F \leq P$ для некоторой максимальной параболической подгруппы P в R. Лиевский ранг R равен двум и $\overline{P} = P/O_2(P) \cong SL(2, 2^n) = PSL(2, 2^n)$. Доказательство завершается применением рассуждений для $R = PSL(3, 2^n)$.

Доказательство теоремы.

Покажем, что D_π-гипотеза верна в классе $Sl_2(2)$. Из [10] следует, что достаточно рассмотреть случай, когда $2 \in \pi$. Из леммы вытекает D_π-нормальность класса $Sl_2(2)$. Рассмотрим простую неабелеву D_π-группу $R \in Sl_2(2)$. Согласно пункту 2 леммы, R принадлежит некоторому классу Виландта относительно π или является π-группой. Из теоремы 1 [7] и пункта 4 предложения 1 [1] следует, что $Aut(R)$ — D_π-группа. Теперь для доказательства теоремы достаточно воспользоваться следствием из теоремы 1 [1].

Abstract. A new class of finite D_π-groups is found.

Литература

[1] В.Д.Мазуров, Д.О.Ревин, *О холловом D_π-свойстве для конечных групп*, Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. №1. С. 125–134.

[2] М.Холл, *Теория групп*, Москва.: И.Л., 1962.

[3] W.Feit, J.G.Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. 1963. Vol. 13. №3. P. 775–1029.

[4] J.H.Walter, *The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups*, Ann. Math. 1969. Vol. 89. P. 405–514.

[5] R.Gilman, D.Gorenstein, *Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two*, Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 207. P. 1–101, P. 103–126.

[6] M.Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*, Ann. Math. 1962. Vol. 72. №1. P. 105–145.

[7] Л.А.Шеметков, *О силовских свойствах конечных групп*, Докл. АН БССР. 1972. Т. 16. №10. С. 881–883.

[8] L.S.Kazarin, *Product of two solvable groups*, Commun. in algebra. 1986. Vol. 14. №6. P. 1001–1066.

[9] B.Huppert, *Endliche Gruppen*, Berlin.: Springer-Verlag, 1967.

[10] D.O.Revin, E.P.Vdovin, *Hall subgroups of odd order of finite groups*, Abstract. The Eighth International Conf. Group and group rings. Wisla. Poland, June. 2000. P. 42–46.

Гомельский филиал
Международного института трудовых и
социальных отношений

Поступило 26.03.2001