Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D25

О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 3

С.Л.Максимов

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Впервые такие группы исследовались О.Ю.Шмидтом [1]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории групп содержится в статье Л.А.Шеметкова [2].

Пусть $E = G_0 \leq ... \leq G_s = G$ — главный ряд группы G. Тогда главные факторы G_i/G_{i-1} являются характеристически простыми группами. В частности, разрешимые главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Если G — неединичная разрешимая группа и $p_i^{n_i} = |G_i/G_{i-1}|$, то число $r(G) = max\{n_i \mid i = 1, ..., s\}$ называется рангом группы G, см. [3], с. 685. Для единичной группы E полагают $r(E) = 0$. В силу теоремы Жордана-Гельдера, любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения ранга определяется однозначно. Ясно также, что сверхразрешимые неединичные группы и только они имеют ранг, равный 1.

В 1995 г. В.С.Монахов [4] исследовал строение групп, у которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы (т.е. имеют ранг 1). В [5] аналогичная задача рассматривалась для ранга 2. В настоящей заметке исследуется строение группы, у которых все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. Доказывается следующая теорема.

Теорема. *В ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 3 тогда и только тогда, когда:*

(1) группа G 2-замкнута и 3-замкнута;

(2) $7'$-холлова подгруппа $G_{7'}$ 2-разложима, а $13'$-холлова подгруппа $G_{13'}$ 3-разложима;

(3) для любых простых $p > q > 3$ бипримарная $\{p, q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ является группой одного из следующих типов:

(3.1) нильпотентна в каждом из следующих случаев:

(3.1.1) $p \not| (q^3 - 1), q | (p - 1)$;

(3.1.2) $p \not| (q^3 - 1), q \not| (p - 1), q | (p^2 - 1)$;

(3.1.3) $p \not| (q^3 - 1), q \not| (p^2 - 1), q \not| (p^3 - 1)$;

(3.1.4) $p \not| (q^3 - 1), q \not| (p - 1), q | (p^2 - 1), q \not| (p^3 - 1)$;

(3.2) p-нильпотентна в случае, когда $p \not| (q^3 - 1), q \not| (p^2 - 1), q | (p^3 - 1)$;

(3.3) q-нильпотентна в каждом из следующих случаев:

(3.3.1) $p | (q^3 - 1), q | (p - 1)$;

(3.3.2) $p | (q^3 - 1), q \not| (p - 1), q | (p^2 - 1)$;

(3.3.3) $p | (q^3 - 1), q \not| (p^2 - 1), q \not| (p^3 - 1)$;

(3.3.4) $p | (q^3 - 1), q \not| (p - 1), q | (p^2 - 1), q \not| (p^3 - 1)$.

Напомним необходимые определения и обозначения. Пусть p — простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. pd-Группа — это группа, порядок которой делится на простое число p. Дополнением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $AB = G$ и $A \bigcap B = 1$. Если в группе имеется дополнение к силовской p-подгруппе, то это дополнение называют p-дополнением. Группа с нормальным p-дополнением называется p-нильпотентной группой. $\{p, q\}$-Группа — это группа, порядок которой делится только на простые числа p и q. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы в A и подгруппы B. Свойства групп Шмидта перечислены в [2], см. также [3,6], в частности, группа Шмидта бипримарна, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая —

циклическая. Для компактности изложения материала будем называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S=[P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, а Q — циклическая ненормальная силовская q-подгруппа. Все остальные используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в [3,6].

Лемма 1. *Пусть p и q — различные простые числа и m — показатель p по модулю q, т.е. m — наименьшее натуральное число, для которого q делит (p^m-1). Тогда любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m. В частности, тогда и только тогда $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг 3, когда q делит (p^3-1) и не делит (p^2-1).*

Доказательство. Ещё О.Ю.Шмидт [1] доказал, что главные факторы любой $S_{<p,q>}$-группы имеют порядки p^m, q, а для групп с неабелевой силовской p-подгруппой существуют еще главные факторы порядка p. Поэтому любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m. При $m=3$ получаем второе утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть p, q — различные простые числа и m — показатель p по модулю q. Тогда естественное полупрямое произведение $[P]Q$ элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q является $S_{<p,q>}$-группой ранга m, у которой все подгруппы примарны.*

Доказательство. Так как m — показатель p по модулю q, то q делит (p^m-1) и не делит (p^n-1) для всех натуральных $n<m$. Пусть P — элементарная абелева группа порядка p^m. Тогда $AutP \simeq GL(m,p)$ и

$$|GL(m,p)|=(p^m-1)(p^m-p)...(p^m-p^{m-1}).$$

Поскольку q делит (p^m-1), то, по теореме Силова, в группе $GL(m,p)$ существует элемент порядка q. Отсюда следует, что P обладает автоморфизмом α порядка q. Если α действует приводимо на P, то, по теореме Машке ([3], с.123), группа $P=P_1\times P_2$ — прямое произведение α-допустимых подгрупп P_1 и P_2, на одной из которых α действует нетождественно. Однако $|P_i|=p^{m_i}<|P|$ и $|AutP_i|=(p^{m_i}-1)...(p^{m_i}-p^{m_i-1})$ не делится на q так как $m_i<m$, противоречие. Поэтому α действует неприводимо на P, и существует естественное полупрямое произведение $[P]Q$, где $Q\simeq<\alpha>$. Так как подгруппа Q простого порядка действует неприводимо на P, то в группе $[P]Q$ все подгруппы примарны, поэтому $[P]Q$ — $S_{<p,q>}$-группа, ранг которой по лемме 1 равен m.

Лемма 3. *Для любого простого числа p существует $S_{<p,q>}$-группа для некоторого простого q ранга 3.*

Доказательство. Нам потребуется следующее утверждение: "пусть a и m — целые числа >1; тогда, исключая случаи $m=2,\ a=2^b-1$ и $m=6,\ a=2$, существует простое число q со следующими свойствами: q делит a^m-1; q не делит a^i-1 для всех $0<i<m$; q не делит m; в частности, m есть показатель числа a по модулю q," см. [7], теорема IX.8.3. По этому утверждению для любого натурального числа m и любого простого числа p, исключая случаи $m=2,\ p=2^b-1$ и $m=6,\ p=2$, существует простое q, для которого m является показателем p по модулю q. Теперь, по лемме 2, существует $S_{<p,q>}$-группа S, ранг которой будет равен m по лемме 1. При $m=3$ получаем требуемое утверждение.

Неоднократно будет использоваться следующая лемма, являющаяся частным случаем теоремы С.А.Чунихина [8], теорема 4.3.1, см. также [3], теорема IV.5.4.

Лемма 4. *Если $\{p,q\}$-группа не p-замкнута, то в ней существует $S_{<q,p>}$-подгруппа.*

Обозначим через $\mathbf{Sch}(3)$ класс, состоящих из всех нильпотентных групп и всех групп, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 3. Через $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}$ обозначается класс всех $\{p,q\}$-групп из $\mathbf{Sch}(3)$. Как обычно $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p$ — классы всех разрешимых, нильпотентных и p-групп соответственно, а $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ — формационное произведение классов $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$. Ясно, что класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ состоит из всех p-замкнутых $\{p,q\}$-групп. Класс всех $\{p,q\}$-групп и всех нильпотентных $\{p,q\}$-групп обозначаются через $\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ соответственно.

Лемма 5. *Пусть p — нечетное простое число. Тогда:*
(1) $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,p\}} = \mathfrak{N}_{\{2,p\}}$ *при* $p \neq 7$;
(2) $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,7\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_7$.

Доказательство. Все нильпотентные $\{2,p\}$-группы принадлежат классу $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,p\}}$. Пусть ненильпотентная группа $G \in \mathbf{Sch}(3)_{\{2,p\}}$. Тогда в группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. Если $\{2,p\}$-группа G не 2-замкнута, то по лемме 4, в ней существует $S_{<p,2>}$-подгруппа, ранг которой равен 1 по лемме 1. Это противоречит условию леммы. Поэтому группа G 2-замкнута, т.е. $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,p\}} \subseteq \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_p$. Так как группа G ненильпотентна, то она не p-замкнута и, по лемме 4, в ней существует $S_{<2,p>}$-подгруппа H. По условию, ранг H равен 3, поэтому из леммы 1 следует, что показатель числа 2 по модулю p равен 3, т.е. $p = 7$. Итак $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,p\}} = \mathfrak{N}_{\{2,p\}}$ при $p \neq 7$. Если ненильпотентная группа G из класса $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_7$, то каждая её подгруппа Шмидта является $S_{<2,7>}$-подгруппой, поэтому её ранг равен 3 и группа $G \in \mathbf{Sch}(3)_{\{2,7\}}$. Следовательно $\mathbf{Sch}(3)_{\{2,7\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_7$.

Лемма 6. *Пусть p — простое число и $p \neq 3$. Тогда:*
(1) $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,p\}} = \mathfrak{N}_{\{3,p\}}$ *при* $p \neq 13$;
(2) $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,13\}} = \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_{13}$.

Доказательство. Все нильпотентные $\{3,p\}$-группы принадлежат классу $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,p\}}$. Пусть ненильпотентная группа $G \in \mathbf{Sch}(3)_{\{3,p\}}$. Тогда в группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. Если $\{3,p\}$-группа G не 3-замкнута, то по лемме 4, в ней существует $S_{<p,3>}$-подгруппа, ранг которой < 3 по лемме 1. Это следует из того, что при любом $p > 3$ число 3 делит $(p^2-1) = (p-1)(p+1)$. Имеем противоречие с условием леммы. Поэтому группа G 3-замкнута, т.е. $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,p\}} \subseteq \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_p$. Так как группа G ненильпотентна, то она не p-замкнута и, по лемме 4, в ней существует $S_{<3,p>}$-подгруппа H. По условию ранг H равен 3, поэтому из леммы 1 следует, что показатель числа 3 по модулю p равен 3, т.е. $p = 13$. Итак $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,p\}} = \mathfrak{N}_{\{3,p\}}$ при $p \neq 13$. Если ненильпотентная группа G из класса $\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_{13}$, то каждая её подгруппа Шмидта является $S_{<3,13>}$-подгруппой, поэтому её ранг равен 3 и группа $G \in \mathbf{Sch}(3)_{\{3,13\}}$. Следовательно $\mathbf{Sch}(3)_{\{3,13\}} = \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_{13}$.

Лемма 7. *Пусть p и q — различные простые числа и $p > q > 3$. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ *в каждом из следующих случаев:*
(1.1) $p \nmid (q^3-1), q \mid (p-1)$;
(1.2) $p \nmid (q^3-1), q \nmid (p-1), q \mid (p^2-1)$;
(1.3) $p \nmid (q^3-1), q \nmid (p^2-1), q \nmid (p^3-1)$;
(1.4) $p \nmid (q^3-1), q \nmid (p-1), q \mid (p^2-1), q \nmid (p^3-1)$;
(2) $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ *в случае, когда* $p \nmid (q^3-1), q \nmid (p^2-1), q \mid (p^3-1)$;
(3) $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$ *в каждом из следующих случаев:*
(3.1) $p \mid (q^3-1), q \mid (p-1)$;

(3.2) $p|(q^3-1), q\nmid(p-1), q|(p^2-1)$;
(3.3) $p|(q^3-1), q\nmid(p^2-1), q\nmid(p^3-1)$;
(3.4) $p|(q^3-1), q\nmid(p-1), q|(p^2-1), q\nmid(p^3-1)$;
(4) $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}=\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ *в случае, когда* $p|(q^3-1), q\nmid(p^2-1), q|(p^3-1)$.

Доказательство. Так как $p>q>3$, то p не делит $(q-1)$ и не делит (q^2-1). Поэтому показатель числа q по модулю p не менее 3, т.е. p либо делит (q^3-1), либо не делит (q^3-1).

Пусть p не делит (q^3-1) и $G\in\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}$. Если G — не p-замкнутая группа, то по лемме 4, в группе G существует $S_{<q,p>}$-подгруппа, ранг которой по лемме 1 больше 3, противоречие. Поэтому группа G p-замкнута и всегда $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}\subseteq\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Если группа G — не q-замкнута, то в G существует $S_{<q,p>}$-подгруппа S и p делит (q^3-1), но не делит (q^2-1), т.е. имеем случай (2). Итак, если p делит (q^3-1), но не делит (q^2-1), то $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}=\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Если условие "$p$ делит (q^3-1), но не делит (q^2-1)" не выполняется, то ранг S отличен от 3 и такой подгруппы S в группе G нет, т.е. группа G должна быть нильпотентной. Случаи, когда условие "p делит (q^3-1), но не делит (q^2-1)" нарушается расписаны в (1.1) – (1.4) и в этих случаях $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}=\mathfrak{N}_{\{p,q\}}$.

Пусть теперь p делит (q^3-1). Предположим, что $q\nmid(p^2-1), q|(p^3-1)$. Тогда в любой $\{p,q\}$-группе ранг каждой подгруппы Шмидта по лемме 1 равен 3, т.е. в этой ситуации $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}=\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$, и имеем случай (4). Если условие "$q\nmid(p^2-1), q|(p^3-1)$" нарушается, то ранг каждой $S_{<p,q>}$-подгруппы отличен от 3 и в любой группе $G\in\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}$ нет $S_{<p,q>}$-подгрупп, т.е. группа G должна быть q-замкнутой и $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}\subseteq\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Случаи, когда условие "$q\nmid(p^2-1), q|(p^3-1)$" нарушается расписаны в (3.1)–(3.4) и в этих случаях $\mathbf{Sch}(3)_{\{p,q\}}=\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$.

Доказательство теоремы. Пусть в ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. Ясно, что это свойство наследуется всеми подгруппами группы G. В группе G нет подгрупп Шмидта ранга 1. По теореме из [4], группа G 2-замкнута, в частности, группа G разрешима и в ней существует $7'$-холлова подгруппа $G_{7'}$ и $13'$-холлова подгруппа $G_{13'}$. Пусть A — бипримарная холлова подгруппа из $G_{7'}$ четного порядка. Ясно, что в A все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. По лемме 5, подгруппа A нильпотентна. Отсюда следует, что группа $G_{7'}$ 2-разложима. Аналогично, используя лемму 6, получаем, что $G_{13'}$ 3-разложима. Утверждение пункта (3) теоремы вытекает из леммы 7. Необходимость доказана.

Обратно, пусть группа ненильпотентна и для неё выполняются утверждения (1)–(3) теоремы. Тогда по леммам 5–7, ранг каждой подгруппы Шмидта группы G равен 3. Теорема доказана.

Пример 1. Согласно лемме 3 для любого простого p и некоторого простого q существует $S_{<p,q>}$-группа ранга 3. Поэтому при любом p существует дисперсивная бипримарная pd-группа с подгруппами Шмидта ранга 3. В частности, ситуации, возникающие в леммах 5,6 и в пунктах (1) – (3) леммы 7, имеют место.

Пример 2. Для простых чисел 61 и 13 число 3 является показателем 61 по модулю 13 и показателем 13 по модулю 61. Пусть A — элементарная абелева группа порядка 61^3, B — элементарная абелева группа порядка 13^3 и Z_k — циклическая группа порядка k. По лемме 2, существуют $S_{<61,13>}$-группа $[A]Z_{13}$ и $S_{<13,61>}$-группа $[B]Z_{61}$. Их прямое произведение $([A]Z_{13})\times([B]Z_{61}$ является недисперсивной $\{13,61\}$-группой, у которой все подгруппы Шмидта имеют ранг 3. Поэтому ситуация, рассмотренная в пункте (4) леммы 7, имеет место для $\{p,q\}=\{13,61\}$. В частности, существуют недисперсивные группы, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 3.

Abstract. Finite groups with Schmidt subgroups of rank 3 are studied.

Литература

[1] О.Ю.Шмидт, *Группы, все подгруппы которых специальные,* Матем сб, 1924, Т.31, С.366–372.

[2] Л.А.Шеметков, *О.Ю.Шмидт и конечные группы,* Укр. матем. ж, 1971, Т.23, N 5, С. 585–590.

[3] B.Huppert, *Endliche Gruppen,* I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1967.

[4] В.С.Монахов *О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта,* Матем. заметки, 1995, Т.58, № 5, С.717–722.

[5] С.Л.Максимов, *О подгруппах Шмидта ранга 2 в конечных группах,* Третья международная алгебраическая конференция в Украине. Сумы, 2001, С.209–210.

[6] Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп,* М.: Наука, 1978.

[7] B.Huppert, N.Blackburn, *Finite groups, II.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982.

[8] С.А.Чунихин, *Подгруппы конечных групп,* Мн.: Наука и техника, 1964.

Белорусский государственный университет транспорта

Поступило 28.03.2001