Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Свойства радикалов конечных групп

Х.А.Аль-Шаро

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются обозначения и определения из [1–2]. Согласно С.А.Чунихину [3], группа (фактор) порядка, делящегося на простое число p, называется pd-группой (pd-фактором).

Хорошо известная характеризация подгруппы Фиттинга $F(G)$ группы G утверждает, что $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных факторов группы G. Аналогичный результат справедлив и для p-нильпотентного радикала $F_p(G)$ группы G (см. [2], с. 45). В работе [4] Л.А.Шеметков впервые рассмотрел вопрос о распространении этих результатов на другие формации. Полученные Л.А.Шеметковым результаты в этом направлении нашли отражение в книге [1]. В настоящей работе мы уточняем и усиливаем эти результаты, рассматривая пересечение обобщенных централизаторов не всех главных факторов, а только тех из них, которые не являются фраттиниевыми или s-фраттиниевыми.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) p-насыщенной, если $G/O_p(G)\cap\Phi(G)\in\mathfrak{F}$; 2) $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, если $G/\Phi(O_p(G))\in\mathfrak{F}$ всегда влечет $G\in\mathfrak{F}$; 3) p-разрешимо насыщенной, если из того, что $G/N\in\mathfrak{F}$, где N — p-подгруппа, содержащаяся в подгруппе Фраттини некоторой p-разрешимой нормальной подгруппы группы G, всегда следует $G\in\mathfrak{F}$. В работе [5] установлено, что $\mathfrak{N}_p$-насыщенность и p-разрешимая насыщенность для формаций эквивалентны. Если формация p-разрешимо насыщена для любого простого числа p, то она называется разрешимо насыщенной. Нам понадобится следующий результат Л.А.Шеметкова.

Теорема 1 (см. [6], теорема 4.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, M и N — некоторые нормальные подгруппы из G такие, что $M\supseteq N$, $N\in\mathfrak{F}$ и $M/N\in\mathfrak{F}$. Предположим, что для каждого простого p, делящего $|N|$, выполняется одно из следующих условий: 1) $\mathfrak{F}$ p-насыщена и силовская p-подгруппа из N содержится в $\Phi(G)$; 2) $\mathfrak{F}$ p-разрешимо насыщена и силовская p-подгруппа из N содержится в подгруппе Фраттини p-разрешимого радикала группы G. Тогда $M\in\mathfrak{F}$.*

По теореме Бэра (см. [2], теорема IV.4.17), каждая непустая разрешимо насыщенная формация $\mathfrak{F}$ может быть определена с помощью функции f, которую Л.А.Шеметков называет композиционным спутником. Функция f сопоставляет каждой простой группе A некоторую формацию $f(A)$, причем значения f на изоморфных группах совпадают. Запись $\mathfrak{F}=CF(f)$ означает, что f — композиционный спутник разрешимо насыщенной формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{F}$ в точности совпадает с классом всех тех групп G, у которых каждый главный фактор H/K f-централен, т.е. $G/C_G(H/K)$ принадлежит значению f на композиционном факторе группы H/K.

Общее определение f-центральности состоит в следующем. Пусть K, M и N — нормальные подгруппы группы G, причем $M\supseteq N$. Говорят, что K действует f-центрально на M/N, если $K/C_K(M/N)$ принадлежит значению f на каждом композиционном факторе группы M/N. Следуя [4], через $C_G^f(M/N)$ обозначим f-централизатор M/N в G, т.е. произведение всех тех нормальных подгрупп из G, которые действуют f-центрально на M/N. Фактор M/N назовем s-фраттиниевым в G, если M/N содержится в подгруппе Фраттини разрешимой нормальной подгруппы группы G/N.

Введем следующее обозначение. Если $\mathfrak{F}=CF(f)$, то через f^c обозначим функцию такую, что для любой простой группы A имеет место $f^c(A)=f(A)$, если $f(A)\neq\emptyset$, и

$f(A)$ — класс $\mathfrak{E}$ всех групп, если $f(A)=\emptyset$. Функция f^c является композиционным спутником формации $CF(f^c)$, которая, очевидно, содержит $\mathfrak{F}=CF(f)$. Напомним еще, что согласно Л.А.Шеметкову, композиционный спутник f формации $\mathfrak{F}=CF(f)$ называется полувнутренним, если для любой простой группы A либо $f(A)=\mathfrak{E}$, либо $f(A)\subseteq\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, причем $\mathfrak{F}=CF(f)$, где f — полувнутренний композиционный спутник. Тогда $\mathfrak{H}=CF(f^c)$ — формация Фиттинга, и выполняются следующие условия:*

1) $G_{\mathfrak{F}}\subseteq G_{\mathfrak{H}}$;

2) $G_{\mathfrak{H}}$ совпадает с пересечением f^c-централизаторов всех главных факторов группы G;

3) $G_{\mathfrak{H}}$ совпадает с пересечением f^c-централизаторов всех не s-фраттиниевых главных факторов группы G.

Доказательство. Так как по определению $f\leq f^c$, то $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$, а значит, $G_{\mathfrak{F}}\subseteq G_{\mathfrak{H}}$. По условию, $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, а значения f и f^c могут не быть таковыми. Тем не менее мы покажем, что $\mathfrak{H}$ — формация Фиттинга. По лемме 15.6 из [1], $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный полувнутренний композиционный спутник F, причем для любой простой группы A выполняется одно из условий: 1) $|A|=p$ — простое число и $F(A)=\mathfrak{N}_pf(A)$; 2) $F(A)\in\{\mathfrak{F},\mathfrak{E}\}$. По лемме 15.7 из [1], спутник F радикален, т.е. все его значения являются формациями Фиттинга. Пусть R — нормальная подгруппа группы $H\in\mathfrak{H}$. Ввиду индукции, можно считать, что H имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, содержащуюся в R. Если значение f^c на композиционном факторе A группы N равно $\mathfrak{E}$, то ясно, что из $R/N\in\mathfrak{H}$ следует $R\in\mathfrak{H}$. Пусть $f^c(A)=f(A)\neq\mathfrak{E}$. Тогда $H/C_H(N)\in f(A)\subseteq\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, то отсюда следует, что $R/C_R(N)\in\mathfrak{F}$. Если N неабелева, то $C_H(N)=1$ и поэтому $R\in\mathfrak{F}$. Пусть N — p-группа, $|A|=p$. Тогда $F(A)=\mathfrak{N}_pf(A)$ — формация Фиттинга и из $H/C_H(N)\in F(A)$ следует, что $R/C_R(N)\in\mathfrak{N}_pf(A)$. Отсюда и из того факта, что неприводимые группы автоморфизмов p-групп не имеют неединичных нормальных p-подгрупп, следует, что N f-гиперцентральна в R, т.е. $R\in\mathfrak{H}$. Пусть теперь $R_1R_2=H$, где R_1 и R_2 — нормальные $\mathfrak{H}$-подгруппы в группе H. Покажем, что $H\in\mathfrak{H}$. Если $R_1\cap R_2=1$, то $R_1R_2=R_1\times R_2\in\mathfrak{H}$. Пусть $R_1\cap R_2\neq 1$ и N — минимальная нормальная подгруппа группы H, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в H. Пусть A — композиционный фактор из N. Если $f^c(A)=\mathfrak{E}$, то из $H/N\in\mathfrak{H}$ следует $H\in\mathfrak{H}$. Пусть $f^c(A)=f(A)\neq\mathfrak{E}$, т.е. $f(A)\subseteq\mathfrak{F}$. Если A неабелева, то $C_H(N)=1$ и $F(N)=1$, а так как N f-гиперцентральна в R_i и ее стабильная группа автоморфизмов ввиду $F(N)=1$ является единичной, то мы получаем, что $R_i\in\mathfrak{F}(i=1,2)$, а значит, $H=R_1R_2\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$. Пусть теперь $|A|=p$. Так как N f-гиперцентральна в R_i и ее стабильная группа автоморфизмов является p-группой, то $R_i/C_{Ri}(N)\in\mathfrak{N}_pf(A)=F(A)$ $(i=1,2)$. Так как $F(A)$ — формация Фиттинга, то $H/C=(R_1C/C)(R_2C/C)$ принадлежит $F(A)$, где $C=C_H(N)$. Теперь ясно, что N f-гиперцентральна в H, т.е. $H\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{H}$ — формация Фиттинга.

Пусть G — произвольная неединичная группа. Поскольку значение f^c не пусто на любом композиционном факторе группы G, то утверждение 2) прямо следует из теоремы Л.А.Шеметкова (см. теорему 15.11 из [1]). Докажем 3). Пусть D — пересечение f^c-централизаторов всех не s-фраттиниевых главных факторов группы G. Ввиду 2), $G_{\mathfrak{H}}\subseteq D$. Чтобы установить обратное включение, нам надо доказать, что $D\in\mathfrak{H}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D.По лемме 15.10 из [1], D f^c-централизует каждый не s-фраттиниев главный фактор группы G. По индукции, $D/N\in\mathfrak{H}$. Если N не s-фраттиниева, то D f^c-централизует N и мы получаем

$D \in \mathfrak{H}$. Пусть N s-фраттиниева, т.е. N содержится в подгруппе Фраттини разрешимого радикала группы G. По теореме 1, $D \in \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Напомним, что группа G называется квазинильпотентной, если $G = HC_G(H/K)$ для любого ее главного фактора H/K. Пусть $\mathfrak{N}^*$ — класс всех квазинильпотентных групп. Хорошо известно, что $\mathfrak{N}^*$ — разрешимо насыщенная формация Фиттинга и имеет композиционный спутник f такой, что $f(A) = (1)$, если A абелева, и $f(A) = form(A)$, если A — неабелева простая группа.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{N}^* = CF(f)$, где спутник f полувнутренний. Тогда $\mathfrak{N}^*$-радикал любой группы G совпадает с пересечением f-централизаторов всех ее не s-фраттиниевых главных факторов.*

Рассмотрим специализацию теоремы 2 для насыщенных формаций. По теореме Гашюца-Любезедер-Шмида [2], каждая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является локальной, т.е. $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — локальный спутник. Функцию f можно при этом рассматривать как композиционный спутник, полагая $f(H) = \cap_{p \in \pi(H)} f(p)$ для любой группы H. Как и выше, локальный спутник f будем называть полувнутренним, если для любого простого p либо $f(p) = \mathfrak{E}$, либо $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ — формация Фиттинга и спутник f полувнутренний. Тогда $\mathfrak{H} = CF(f^c)$ — формация Фиттинга, и для любой группы G справедливы утверждения: 1) $G_{\mathfrak{H}}$ совпадает с пересечением f^c-централизаторов всех не s-фраттиниевых главных факторов группы G; 2) если $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ совпадает с пересечением f-централизаторов всех нефраттиниевых главных факторов группы G.*

Доказательство. По теореме 2, $\mathfrak{H}$ — формация Фиттинга, и $G_{\mathfrak{H}}$ совпадает с пересечением f^c-централизаторов всех не s-фраттиниевых главных факторов группы G. Пусть $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ и D — пересечение f-централизаторов всех нефраттиниевых главных факторов группы G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в D. По лемме 15.10 из [1],D f-централизует каждый нефраттиниев главный фактор группы G. По индукции $D/N \in \mathfrak{F}$. Если N нефраттиниев, то $G \in \mathfrak{F}$, так как $D \subseteq C^f_G(N)$. Если же $N \subseteq \Phi(G)$, то $D \in \mathfrak{F}$ по теореме 1. Теорема доказана.

Очевидно, формация всех p-нильпотентных групп имеет локальный спутник f такой, что $f(p) = (1)$ и $f(q) = \mathfrak{E}$ для любого простого $q \neq p$. Спутник f — полувнутренний, и потому из теоремы 3 прямо следует

Следствие 3.1 (см.[2], с.45). *В любой группе G p-нильпотентный радикал $F_p(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех ее нефраттиниевых главных pd-факторов.*

Abstract. Notations see in [1-2]. It is well known that the Fitting subgroup $F(G)$ of any group G coincides with the intersection of the centralizers of all chief factors H/K of G such that p divides $|H/K|$. In 1981 L.A.Shemetkov first posed a question about spreading the mentioned results on arbitrary Fitting formations. Those results of L.A.Shemetkov for solubly saturated Fitting formations were included in [1]. It is well known that every solubly saturated formation $\mathfrak{F}$ is defined by a composition satellite f: simple groups→formations; we write $\mathfrak{F} = CF(f)$ where f is called semiinner if for any A either $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ or $f(A)$ is the class of all groups. Let f be a semiinner satellite of a solubly saturated formation $\mathfrak{F} = CF(f)$. A chief factor H/K of a group G is called: a)f-central in G if $G/C_G(H/K \in f(H/K)$; b) s-frattini if H/K is contained in the Frattini subgroup of the soluble radical of G/K.

We denote by f^c a composition satellite such that for every simple group A either $f(A) = f^c(A) \neq \emptyset$ or $f(A) = \emptyset$ and $f^c(A)$ is the class of all groups. The subgroup $C^f_G(H/K$ is

the f-centralizer of H/K in G, i.e. the product of all normal subgroups in G which acts f-centrally on H/K. In the paper the following theorem is proved.

Theorem. *Let f be some seminner composition satellite of a Fitting formation $\mathfrak{F} = CF(f)$. Then $\mathfrak{H} = CF(f^c)$ is a Fitting formation and the following propositions hold: a) $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$; b) $G_{\mathfrak{H}}$ coincides with the intersection of f^c-centralizers of all chief factors of G; c) $G_{\mathfrak{H}}$ coincides with the intersection of f^c-centralizers of all non-s-frattini cnief factors of G.*

Литература

[1] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

[2] K.Doerk, T.Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[3] С.А.Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Минск, Наука и техника, 1964.

[4] Л.А.Шеметков, *О $\mathfrak{F}$-радикалах конечных групп*, ДАН БССР, №10 (1981), 869–872.

[5] L.A.Shemetkov, *Frattini extensions of finite groups and formations*, Comm. Algebra, 25, №3 (1997), 955–964.

[6] L.A.Shemetkov, *Wolfgang Gaschütz in Gomel*, Известия ГГУ им. Ф.Скорины, №3 (2000), 18–38.

Jordan, Mafraq

Поступило 30.03.2001