МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИКА UMD ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНОЗНАЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА НА ПОЛЕ *p*-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А.Г. Сидорик

Белорусский государственный университет, Минск

CHARACTERISTIC OF UMD SPACES WITH HILBERT TRANSFORMATION OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS ON THE FIELD OF *p*-ADIC NUMBERS

H.G. Sidoryk

Belarusian State University, Minsk

Мы рассматриваем преобразование Гильберта векторнозначных функций на группе целых p-адических чисел Z_p, принимающих значения в банаховом пространстве X, квадратично интегрируемых по Бохнеру. Доказано, что если при $p \neq 2$ преобразование Гильберта $H : L_2(Z_p, X) \to L_2(Z_p, X)$ является ограниченным оператором, то банахово пространство X является UMD пространством.

Ключевые слова: *преобразование Гильберта, UMD пространство, p-адические числа, преобразование Фурье.*

We consider Hilbert transformation of vector-valued functions on the group of p-adic integers Z_p taking values in Banach space X, and square-integrable in Bochner sense. If Hilbert transformation $H : L_2(Z_p, X) \to L_2(Z_p, X)$ with $p \neq 2$ is a bounded operator, then Banach space X is an UMD space.

Keywords: *Hilbert transformation, UMD space, p-adic numbers, Fourier transformation.*

Введение

Цель статьи – показать связь между ограниченностью преобразования Гильберта функций со значениями в банаховом пространстве и свойством безусловности мартингальных разностей (UMD) этого пространства.

Введем ряд необходимых понятий и сведений. Пусть (T, μ) – пространство с мерой, X – банахово пространство. Через $L_2(T, X)$ обозначим пространство функций, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера [1], т.е. слабо измеримые с конечной нормой

$$\|x\|_{L_2(X)} = \left(\int_T \|x(t)\|_X^2 \, d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство и $A_1, A_2, \ldots$ неубывающая последовательность σ-алгебр из A. И пусть $f = (f_1, f_2, \ldots)$ – X-значный мартингал с последовательностью мартингальных разностей $d = (d_1, d_2, \ldots)$: $d_n = f_n - f_{n-1}$ ($f_0 = 0$ по определению), где $d_n : \Omega \to X$ сильно измеримая относительно A_n с конечным математическим ожиданием $E|d_n|$ и условным математическим ожиданием $E(d_{n+1} | A_n) = 0, \ n \geq 1$.

В [2] Б. Море дал следующее определение: банахово пространство X является UMD пространством ($X \in (UMD)$), если для всех X-значных последовательностей мартингальных разностей $d = (d_1, d_2, \ldots)$, всех чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, равных ± 1, и всех $n \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k \right\|_{L_2(X)} \leq C_X \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k \right\|_{L_2(X)}, \qquad (0.1)$$

где константа C_X зависит только от X.

Рассмотрим преобразование Гильберта на вещественной оси $H : L_2(R, X) \to L_2(R, X)$, действующее следующим образом:

$$Hf(t) = v.p. \int_R \frac{f(s-t)}{s} ds.$$

Связь между UMD пространствами и ограниченностью преобразования Гильберта на поле вещественных чисел устанавливает следующая теорема.

***Теорема* 0.1** ([3], [4]). *Преобразование Гильберта $H : L_2(R, X) \to L_2(R, X)$ ограничено тогда и только тогда, когда X является UMD пространством.*

Трудности изучения ограниченности преобразования Гильберта и связанных проблем гармонического анализа в $L_2(R, X)$ обусловлены тем, что преобразование Фурье ограничено в $L_2(R,X)$ только в том случае, когда X изоморфно гильбертовому пространству [5].

1 Предварительные сведения

Рассмотрим вещественозначное преобразование Гильберта на поле p-адических чисел Q_p [6]

$$H: L_2(Q_p,R) \to L_2(Q_p,R),$$

$$Hf(y) = \lim_{k\to 0} \int_{\{x: |x|_p \le p^{-k}\}} \frac{\omega(x)}{|x|_p} f(y-x)\,d\mu(x),$$

где $|\cdot|_p$ – р-адический модуль, μ – мера Хаара группы Q_p, $\omega(x)$ – ограниченная μ-измеримая функция на сфере $S(0,1)=\{x: |x|_p = 1\}$ такая, что $\int_{S(0,1)} \omega(x)d\mu(x) = 0.$ Функция $\omega(x)$ разлагается в ряд Фурье $\omega(x) = \sum_{\theta\in\widehat{Z_p^\times},\theta\ne 1} \omega_\theta \theta(x),$ где θ – мультипликативный характер на мультипликативной группе $Z_p^\times$. Таким образом, изучение общего сингулярного преобразования сводится к изучению более специального преобразования, соответствующего $\omega(x)=\theta(x),$ которое представляется в виде

$$H = F^{-1} M_{\bar\theta} F, \qquad (1.1)$$

где $F: L_2(Q_p,R) \to L_2(Q_p,R)$ преобразование Фурье, являющееся изометрическим изоморфизмом, $M_{\bar\theta}$ – оператор умножения на мультипликативный комплексно-сопряженный характер $\bar\theta$ ($\theta \ne 1$). Из (1.1) несложно видеть, что преобразование Гильберта $H: L_2(Q_p,R) \to L_2(Q_p,R)$ ограничено.

Возникает ряд естественных вопросов:

1. Что происходит в случае, когда функции принимают значение в некотором банаховом пространстве?

2. Справедлива ли в случае ограниченности оператора H формула (0.1)?

3. Ограничено ли преобразование Гильберта для любого банахова пространства, если нет, то какими свойствами обладает пространство в случае ограниченности преобразования?

В работе [7] авторами доказана теорема:

***Теорема* 1.1** ([7]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Банахово пространство* X *изоморфно гильбертову.*

2. *Существует* $C>0$ *такое, что для любого натурального* N *и* $x_0, x_1, \dots, x_{p^{2N}-1} \in X$

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right)\cdot x_k \right\|^2 d\mu(t) \le C \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2.$$

3. *Существует* $C>0$ *такое, что для любого натурального* N *и* $\varepsilon>0$

$$C^{-1}\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 \le \int_{\mathbf{Z}_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right)\cdot x_k \right\|^2 d\mu(t).$$

4. *Преобразование Фурье*

$$F: L_2(Q_p,X) \to L_2(Q_p,X)$$

является ограниченным оператором.

Из теоремы 1.1. следует, что для банаховозначного случая преобразование Гильберта, вообще говоря, не ограничено. Если банахово пространство изоморфно гильбертову, то преобразование Гильберта ограничено. Гильбертовы пространства входят в класс UMD пространств. Далее будет показано, что ограниченность преобразования Гильберта влечет свойство безусловности мартингальных разностей.

2 Вспомогательные результаты

Докажем ряд необходимых лемм.

Рассмотрим вопрос о мультипликативных характерах θ из $\widehat{Z_p^\times}$ ($p\ne 2$) таких, что $\theta^2=1$. Такие характеры задаются через символ Лежандра [8]. Действительно, любой элемент $x\in Z_p^\times$ можно однозначно представить в виде $x=a_0(1+py)$, где $a_0 \in F_p^\times = \{1,2,\dots,p-1\}$, $y\in Z_p$. Получаем разложение группы $Z_p^\times$ в произведение $F_p^\times \times (1+pZ_p)$. Таким образом, группу характеров $\widehat{Z_p^\times}$ можно определить следующим образом

$$\widehat{Z_p^\times} \cong \widehat{F_p^\times} \times \widehat{(1+pZ_p)} \cong F_p^\times \times (Q_p/Z_p).$$

***Лемма* 2.1** *Мультипликативный характер* θ *на мультипликативной группе* $G=G_1\times G_2$ $\theta(x)=\theta(x_1,x_2)=\theta_1(x_1)\times\theta_2(x_2)$ *принимает значения из множества* $\{-1,1\}$ *тогда и только тогда, когда* $\theta_1(x_1)$ *принимает значения из множества* $\{-1,1\}$ *и* $\theta_2(x_2)$ *принимает значения из множества* $\{-1,1\}$.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 единичные элементы групп G_1 и G_2 соответственно, т.е. $\theta_1(e_1)=\theta_2(e_2)=1$. Получаем,

$$\theta(e_1,x_2)=\theta_1(e_1)\times\theta_2(x_2)=\theta_2(x_2).$$

Значит, $\theta_2(x_2)$ принимает значения из множества $\{-1,1\}$. И $\theta(x_1,e_2)=\theta_1(x_1)\times\theta_2(e_2)=\theta_1(x_1),$ откуда следует, что $\theta_1(x_1)$ принимает значения из множества $\{-1,1\}$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Так как мультипликативные характеры на $F_p^\times$, принимающие значения ± 1, могут быть только $\theta\equiv 1$ или θ, определяемый через символ

Лежандра, а на $(1+pZ_p)$ – только $\theta \equiv 1$, то согласно лемме 1 мультипликативные характеры θ из $\widehat{Z_p^{\times}}$ ($p \neq 2$) такие, что $\theta^2 = 1$, могут быть или тривиальны, или заданы с помощью символа Лежандра. Поскольку тривиальные характеры не определяют преобразование Гильберта, то в дальнейшем будем работать только с символом Лежандра.

Лемма 2.2. *Преобразование Фурье*

$$F : L_2(Q_p, X) \to L_2(Q_p, X)$$

сохраняет свойство четности (нечетности).

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ четная функция. Тогда

$$(F\varphi)(-\xi) = \int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(-\xi t)d\mu(t) =$$
$$= \int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(\xi(-t))d\mu(t) =$$
$$= \int_{Q_p} \varphi(-t)\chi_p(\xi(t))d\mu(-t) =$$
$$= \int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(\xi t)d\mu(t) = (F\varphi)(\xi).$$

Если же $\varphi(t)$ нечетная функция, то

$$(F\varphi)(-\xi) = \int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(-\xi t)d\mu(t) =$$
$$= \int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(\xi(-t))d\mu(t) =$$
$$= \int_{Q_p} \varphi(-t)\chi_p(\xi(t))d\mu(-t) =$$
$$= -\int_{Q_p} \varphi(t)\chi_p(\xi t)d\mu(t) = -(F\varphi)(\xi).$$

Это же свойство будет верно и для обратного преобразования Фурье. Лемма доказана.

Рассмотрим функции на Z_p, аналогичные функциям Радемахера:

$$r(x) = \begin{cases} 1, & a(x) \le \dfrac{p-1}{2}, \\ -1, & a(x) > \dfrac{p-1}{2}, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $a(x)$ – первая ненулевая цифра в каноническом разложении числа x;

$$r(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_2(x)}{p}\right), & a_1(x) \le \dfrac{p-1}{2}, \\ \left(\dfrac{a_2(-x)}{p}\right), & a_1(x) > \dfrac{p-1}{2}, \end{cases} \qquad (2.2)$$

где $a_1(x)$ – первая ненулевая цифра, $a_2(x)$ – вторая ненулевая цифра в каноническом разложении числа x, $\left(\dfrac{\cdot}{p}\right)$ – символ Лежандра.

Не сложно проверить, что функция (2.1) нечетная, функция (2.2) – четная.

Лемма 2.3. *Пусть $H : L_2(Z_p, R) \to L_2(Z_p, R)$ – преобразование Гильберта $p \neq 2$, $r(t)$ – функция Радемахера, число $\varepsilon = \pm 1$, тогда $\varepsilon Hr(t) = Hr(\varepsilon t)$.*

Доказательство. Если $\varepsilon = 1$, то утверждение очевидно.

Пусть $\varepsilon = -1$, тогда необходимо проверить, что $Hr(-t) = -Hr(t)$, т.е. преобразование Гильберта функции r нечетно. Для этого воспользуемся формулой (1.1), записанной в виде $\widehat{Hr}(\xi) = \theta(\xi)\hat{r}(\xi)$, где $\theta(\xi) = \left(\dfrac{a_0}{p}\right)$ – характер, заданный через символ Лежандра, a_0 – первая ненулевая цифра в каноническом разложении числа ξ.

Если $p \equiv 1 \pmod 4$, т. е. θ – четная функция, то взяв нечетный аналог функции Радемахера (2.1), в силу леммы 2.2 получаем, что $\theta(\xi)\hat{r}(\xi)$ будет нечетной функцией и преобразование Гильберта Hr нечетно.

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, т. е. θ – нечетная функция, то взяв четный аналог функции Радемахера (2.2), в силу леммы 2.2 получаем, что $\theta(\xi)\hat{r}(\xi)$ будет нечетной функцией и преобразование Гильберта Hr нечетно.

Перейдем к рассмотрению векторнозначного случая. Пусть X – банахово пространство, преобразование Гильберта

$$H : L_2(Z_p, X) \to L_2(Z_p, X).$$

В качестве всюду плотной области определения оператора H рассмотрим

$$L_2(Z_p, R) \otimes X = \left\{ \sum_{(i)} \varphi_i b_i : \varphi_i \in L_2(Z_p, R), b_i \in X \right\}.$$

Лемма 2.4. *Для любого X-значного тригонометрического полинома*

$$g(t) = \sum_{k \in Q_p/Z_p, |k|_p \le p^N} b_k \chi_p(kt), \ \ b_k \in X$$

и любой функции $\phi \in L_2(Z_p, R)$ имеем

$$H(\phi(p^{-N}t)g(t)) = (H\phi)(p^{-N}t)g(t). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Функцию $\phi \in L_2(Z_p, R)$ можем рассматривать как функцию из $L_2(Q_p, R)$ следующим образом

$$\phi \in L_2(Z_p, R) \subset L_2(Q_p, R),$$
$$\phi(t) = \begin{cases} \phi(t), & |t|_p \le 1, \\ 0, & |t|_p > 1. \end{cases}$$

Вычислим преобразование Фурье

$$F(\phi(p^{-N}t))(\xi) =$$
$$= \int_{Q_p} \phi(p^{-N}t)\chi(\xi t)d\mu(t) = \begin{bmatrix} t' = p^{-N}t \\ d\mu(t) = p^{-N}d\mu(t') \end{bmatrix} =$$

$$= p^{-N}\int\limits_{Q_p}\phi(t')\chi(p^N\xi t')d\mu(t') = p^{-N}(F\phi)(p^N\xi).$$

Рассмотрим число $\gamma \geq 1$ такое, что мультипликативный характер $\theta(t)|_{S(0,1)}$ постоянен на шарах радиуса $p^{-\gamma}$.

Пусть N – достаточно большое целое (точная оценка в конце). К равенству (2.3) применим преобразование Фурье и получим

$$\begin{aligned}&\theta(\xi)\cdot(p^{-N}\hat{\phi}(p^N\xi)*\hat{g}(\xi)) =\\ &=(\theta(\xi)\cdot p^{-N}\hat{\phi}(p^N\xi))*\hat{g}(\xi).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначим через $r[f]$ – радиус постоянства, $R[f]$ – радиус носителя функции f. Тогда $r[\hat{\phi}(p^N\xi)] = p^N$ (т. е. $\hat{\phi}(p^N\xi)\equiv 0$ на шаре $B[0,p^N]$), $r[\hat{g}(\xi)]=1$. Причем, $R[\hat{g}]\geq r[\hat{g}]$, т. е. $R[g]\geq 1$.

На дополнении к $B[0,p^N]$ функция $\theta(\xi)$ имеет радиус постоянства $p^{N+1-\gamma}$, за счет свойства $\theta(p^N\xi)=\theta(\xi)$. Равенство (2.4) верно при условии $\min\{r[\hat{\phi}(p^N\xi)], r[\theta(\xi)]\}\geq R[\hat{g}]$. За счет произвольности выбора N, возьмем $N\geq\gamma-1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\min\{r[\hat{\phi}(p^N\xi)], r[\theta(\xi)]\} =\\ &=\min\{p^N, p^{N+1-\gamma}\} = p^{N+1-\gamma}\geq 1 = R[\hat{g}].\end{aligned}$$

Значит, выполняется равенство (2.4), а, следовательно, и равенство (2.3). Лемма доказана.

***Лемма* 2.5.** *Предположим, что преобразование Гильберта* $H: L_2(Z_p,X)\to L_2(Z_p,X)$ *ограничено с константой ограниченности* C_X. *Для любых функций* $\phi_k\in L_2(Z_p,R)$ *и* $g_k(t_1,t_2,...t_k)\in L_2(Z_p^k,X)$, *и любого натурального* $n\in N$ *имеем*

$$\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1,t_2,...,t_k)H\phi_k(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)\leq$$
$$\leq C_X\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1,t_2,...,t_k)\phi_k(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t).$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $g_k(t_1,t_2,...t_k)$ тригонометрические полиномы. Так как H ограничено, то по лемме 2.4 получим

$$\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1+\alpha,...,t_k+\alpha)H\phi_k(t_{k+1}+\alpha)\right\|_X^2 d\mu(\alpha)=$$
$$=\int\limits_{Z_p}\left\|H\left(\sum_{k=1}^n g_k(t_1+\alpha,...,t_k+\alpha)\phi_k(t_{k+1}+\alpha)\right)\right\|_X^2 d\mu(\alpha)\leq$$
$$\leq C_X\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1+\alpha,...,t_k+\alpha)\phi_k(t_{k+1}+\alpha)\right\|_X^2 d\mu(\alpha)$$

для любого $t=(t_1,t_2,...,t_k,t_{k+1})\in Z_p^{k+1}$. Теперь проинтегрируем по t на Z_p^{k+1} и примерим теорему Фубини. Так как $\int\limits_{Z_p} d\mu(\alpha)=1$, то переменная α исчезает. Таким образом, лемма доказана.

В силу того, что мультипликативный характер определен через символ Лежандра, то преобразование Гильберта $H^2=I$, т. е. тождественно. Следовательно, можно получить неравенство в обратную сторону.

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1,t_2,...,t_k)\phi_k(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)\leq\\ &\leq C_X\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n g_k(t_1,t_2,...,t_k)H\phi_k(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t).\end{aligned} \tag{2.5}$$

3 Основной результат

Докажем основную теорему данной статьи.

Чтобы проверять, что X является UMD пространством, достаточно проверять условие (0.1) для мартингалов (X-значных) Уолша–Пэли (Walsh–Paley) f, чья последовательность мартингальных разностей имеет вид $d_k = D_k(r_1,r_2,...,r_k)r_{k+1}$, где (r_k) – последовательность функций Радемахера, D_k – X-значная функция [9].

В нашем случае условие (0.1) имеет вид для любого $n\in N$ и всех чисел $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...$ равных ±1

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k d_k(t)\right\|_X^2 d\mu(t)\leq\\ &\leq C_X\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=1}^n d_k(t)\right\|_X^2 d\mu(t).\end{aligned} \tag{3.1}$$

***Теорема* 3.1.** *Пусть преобразование Гильберта* $H: L_2(Z_p,X)\to L_2(Z_p,X)$ $(p\neq 2)$ *ограничено, тогда* X *является UMD пространством.*

Доказательство. Если $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$, то в качестве функции Радемахера берем ее нечетный аналог (2.1). Получаем

$$I=\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k D_k(r(t_1),...,r(t_k))r(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)\leq$$

[согласно неравенству (2.5)]

$$\leq C_X^2\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k D_k(r(t_1),...,r(t_k))Hr(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)=$$
$$=C_X^2\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n D_k(r(t_1),...,r(t_k))\varepsilon_k Hr(t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)=$$

[по лемме 2.3]

$$=C_X^2\int\limits_{Z_p^{n+1}}\left\|\sum_{k=1}^n D_k(r(t_1),...,r(t_k))Hr(\varepsilon_k t_{k+1})\right\|_X^2 d\mu(t)\leq$$

[по лемме 2.5]

$$\le C_X^4 \int\limits_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^{n} D_k(r(t_1),...,r(t_k)) r(\varepsilon_k t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) =$$

[замена переменных]

$$= C_X^4 \int\limits_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^{n} D_k(r(t_1),...,r(t_k)) r(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) = I'.$$

Левая и правая части в неравенстве (3.1) соответственно равны I и I'. Значит, неравенство (3.1) доказано.

Если $p \equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$, то в качестве функции Радемахера берем ее четный аналог (2.2) и повторяем все предыдущие рассуждения. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю Радыно Якову Валентиновичу за постановку задачи и ценные замечания при ее решении, а также Радыно Евгению Мефодьевичу за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikusinski, J.* The Bochner integral / J. Mikusinski. – Acad. Press, 1978.

2. *Maurey, B.* Systeme de Haar / B. Maurey // Seminaire Maurey – Schwartz. Ecole Polytechnique. Paris. – 1974–1975. – P. I.1 – I.11, II.1 – II.13.

3. *Bourgain, J.* Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional. / J. Bourgain // Arc. Mat. – 1983. – Vol. 21. – № 2 – P. 163–168.

4. *Burkholder, D.L.* A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions / D.L. Burkholder // Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund. – 1981. – P. 270–286.

5. *Kwapień, S.* Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients / S Kwapień // Studia mathematica. – 1972. – Vol. XLIV. – P. 583–595.

6. *Philips, K.* Hilbert transform for the p-adic and p-series fields / K. Philips // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23, № 2. – P. 329–347.

7. *Радыно, Е.М.* Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p-адических чисел / Е.М. Радыно, Я.В. Радыно, А.Г. Сидорик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 17–22.

8. *Виноградов, И.М.* Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М. : Наука, 1965.

9. *Pisier, G.* Martingales with values in uniformly convex spaces / G. Pisier // Israel J. Math. – 1975. – Vol. 20. – P. 326–350.

Поступила в редакцию 12.01.11.