Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(16) Вопросы алгебры (2000), 111–115
2000 Mathematics Subject Classification: 20E15, 20F19

О группах, факторизуемых двумя почти локально нормальными подгруппами

Н.С.Черников[1], С.В.Путилов

Посвящается профессору В.Гашюцу в связи с его 80-летием

Напомним, что для произвольного класса $\mathfrak{X}$ групп локально $\mathfrak{X}$-группа — это группа, обладающая локальной системой $\mathfrak{X}$-подгрупп, и почти $\mathfrak{X}$-группа — это конечное расширение группы из класса $\mathfrak{X}$. Напомним также, что для произвольной группы X $\pi(X)$ — множество всех простых делителей порядков ее элементов.

Первым из авторов настоящей работы было установлено, что локально почти разрешимая группа $G = AB$ с почти локально нормальными подгруппами-множителями A и B является локально конечной π-группой с $\pi = \pi(A)\bigcup\pi(B)$ (см. [1], теорема 1.9, а также [2]). Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, утверждение 1 которой существенно усиливает отмеченное предложение.

Ниже для произвольных попарно перестановочных подгрупп X_α, $\alpha \in I$ группы через $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ обозначается их произведение (т. е. $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} X_{\alpha_1}\ldots X_{\alpha_k}$).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — минимальные локальные классы групп, замкнутые относительно взятия возрастающих нормальных рядов и содержащие соответственно класс всех локально почти разрешимых и класс всех локально разрешимых групп; $G \in \mathfrak{X}$, $G = AB$, A и B — подгруппы группы G и выполняется хотя бы одно из условий: 1) A и B почти локально нормальны; 2) A локально нормальна, а B гиперконечна. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. G является локально конечной π-группой с $\pi = \pi(A)\bigcup\pi(B)$. Если $G \in \mathfrak{Y}$, то G локально разрешима.

2. Если G локально разрешима, а A и B локально нормальны, то найдутся попарно перестановочные силовские p-подгруппы A_p и B_p, $p \in \mathbb{P}$, по одной для каждого простого p соответственно групп A и B, такие, что для любого множества $\pi \neq \varnothing$ простых чисел $\prod\limits_{p\in\pi} A_p$, $\prod\limits_{p\in\pi} B_p$ и $(\prod\limits_{p\in\pi} A_p)(\prod\limits_{p\in\pi} B_p)$ — силовские π-подгруппы соответственно групп A, B и G.

Напомним, что гиперконечная группа — это группа, обладающая возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами. Класс гиперконечных групп входит в класс локально конечных групп и включает в себя, например, классы всех почти локально нормальных групп и периодических гиперцентральных групп (в частности, периодических нильпотентных групп).

В связи с утверждением 2 настоящей теоремы отметим теорему автора [3], в соответствии с которой в случае, когда G является периодической разрешимой линейной группой, требование локальной нормальности подгрупп A и B можно отбросить. Заметим, что в утверждении 2, даже для одной из подгрупп A и B требование локально нормальности нельзя ослабить до требования почти локальной нормальности (даже в предположении метабелевости и бипримарности группы G). Действительно, вследствие [4] при любых простых p и $q \neq p$ для произвольных конечной абелевой p-группы

[1]работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–01–00462)

$S \neq 1$ и бесконечной абелевой p-подгруппы P существует группа G, содержащая S в качестве подгруппы, P в качестве силовской p-подгруппы и элементарную абелеву q-подгруппу $Q \lhd G$, такая, что $G = \langle S, P\rangle$ и $G/Q = (SQ/Q) \times (PQ/Q)$. Тогда G — метабелева $\{p,q\}$-группа (счетная, если P счетна), $G = AB$ для $A = QS$ и $B = P$, A почти локально нормальна и B абелева, но не существует силовских p-подгрупп A_p и B_p групп A и B, для которых A_pB_p является силовской p-подгруппой группы G.

Доказательству теоремы предпошлем два предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — тот же, что в теореме; $G = AB$ — группа, $L \trianglelefteq A$ и $M \trianglelefteq B$, L и M конечны, $H = \langle L, M\rangle$. Пусть $H \in \mathfrak{X}$ и выполняется какое-нибудь из условий:*

а) $N_G(H) = N_A(H)N_B(H)$;

б) для каждого $g \in A$ $H \not\subset H^g$;

в) для каждого $g \in A$ $H^g \not\subset H$;

г) H не изоморфна ни одной из своих собственных подгрупп;

д) хотя бы одна из подгрупп A и B периодическая;

е) для каждого $g \in A$ найдется $n \in \mathbb{N}$, при котором $g^n \in N_G(H)$.

Тогда подгруппа H конечна.

(Так как $G = BA$, то в любом из условий б), в), е) можно заменить A на B).

Доказательство. Ввиду леммы 1.6 [1] любое из условий б), г), д) влечет а). Так как из $H^g \not\subset H$ для каждого $g \in G$ следует, что $H \not\subset H^{g^{-1}}$ для каждого $g \in G$, то в) влечет б). Так как из $H^g \subseteq H$ и $g^n \subseteq H$ следует $H = H^{g^n} \subseteq \ldots \subseteq H$, т.е. $H = H^g$, то е) влечет б). Следовательно, выполняется условие а). Далее не теряя общности рассуждений можно считать, что $H \trianglelefteq G$.

Пусть $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_1$ — классы всех абелевых и почти абелевых групп и для порядковых $\alpha > 1$ индуктивно: если α непредельное, то $\mathfrak{X}_\alpha$ — класс всех групп, обладающих локальной системой подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{X}_{\alpha-1}$-факторами; если α предельное, то $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{X}_\beta$. Очевидно, при некотором α $H \in \mathfrak{X}_\alpha$. Пусть H бесконечна и γ — минимальное, для которого в H найдется подгруппа K конечного индекса, обладающая некоторой бесконечной факторгруппой $K/R \in \mathfrak{X}_\gamma$. Очевидно, γ непредельное.

Покажем, что $\gamma = 0$. Пусть $\gamma \neq 0$. Так как H конечнопорождена, то K/R конечнопорождена вследствие леммы О. Шрейера. Поэтому, очевидно, K/R обладает возрастающим нормальным рядом с $X_{\gamma-1}$-факторами. Пусть D/R — наименьший имеющий конечный индекс в K/R член этого ряда. Тогда, снова ввиду леммы О. Шрейера, D/R конечнопорожден. Поэтому, очевидно, он имеет в ряде предшествующий член F/R. Имеем $|H : D| < \infty$, $D/F \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}$ и факторгруппа D/F бесконечна. Противоречие.

Итак, K/R абелева. Положим $T = \bigcap\limits_{g\in G} K^g$ и $U = T \bigcap R$. Так как H конечнопорождена и $|H : K| < \infty$, $U = T \bigcap R$. Так как H конечнопорождена и $|H : K| < \infty$, то ввиду леммы Б. Неймана $|H : T| < \infty$. Поэтому T/U — бесконечная абелева и, значит, индекс $|T : T'|$ бесконечен. Следовательно, в факторгруппе $G/T = (AT'/T')(BT'/T')$ конечные подгруппы $LT'/T' \trianglelefteq AT'/T'$ и $MT'/T' \trianglelefteq BT'/T'$ порождают бесконечную нормальную почти абелеву подгруппу H/T', что невозможно ввиду леммы 1.21 [1]. Полученное противоречие доказывает справедливость предложения.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — тот же, что в теореме; $G = AB$ — группа, хотя бы одна из подгрупп A и B периодическая, $H \in \mathfrak{X}$ — подгруппа группы G, порожденная* *некоторыми конечными нормальными делителями подгрупп A и B. Тогда H локально конечна и $\pi(H) \subseteq \pi(A) \bigcup \pi(B)$.*

Доказательство. Действительно, вследствие предложения 1 H локально конечна и потому ввиду леммы 1.22 [1] выполняется включение.

Доказательство теоремы. Докажем утверждение 1. Покажем сначала, что $\mathfrak{X}$ замкнут относительно гомоморфных образов. Предположим, что это не так. Пусть $\mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha > 1$, классы из доказательства предложения 1. Так как, очевидно, $\mathfrak{X}$ является объединением этих классов, то не все они замкнуты по гомоморфизмам. Пусть γ — минимальное, для которых $\mathfrak{X}_\gamma$ не замкнут, $X \in \mathfrak{X}_\gamma$, φ — гомоморфизм X и $X^\varphi \notin \mathfrak{X}_\gamma$. Так как, очевидно, γ непредельное, то X обладает локальной системой подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$-факторами. Очевидно, все Y^φ с $Y \in \mu$ образуют локальную систему группы X^φ. Поскольку $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$ замкнут относительно гомоморфизмов, то Y^γ имеет такой же, как у Y, ряд. Но тогда $X^\varphi \in \mathfrak{X}_\gamma$. Противоречие.

Пусть R — произведение всех инвариантных локально конечных π-подгрупп группы G и T/R — произвольная инвариантная локально конечная подгруппа фактор-группы G/R. Тогда вследствие леммы О.Ю.Шмидта T является локально конечной π-подгруппой и, значит, $T = R$. Следовательно, G/R не содержит отличных от единицы инвариантных локально конечных π-подгрупп, и нужно показать, что $G/R = 1$. Далее, $G/R \in \mathfrak{X}$, $G/R = (AR/R)(BR/R)$ и, если в условиях 1), 2) заменить A и B на AR/R и BR/R, то хотя бы одно из них будет выполняться в группе G/R. Учитывая это далее без ограничения общности рассуждений можно считать, что $R = 1$.

Обозначим через H подгруппу, порожденную всеми конечными нормальными делителями подгрупп A и B. Ввиду предложения 2 H является локально конечной π-подгруппой.

Пусть выполняется условие 1). Так как A и B почти локально нормальны, то, очевидно, $|A : H \bigcap A| < \infty$ и $|B : H \bigcap B| < \infty$. Поэтому в силу леммы Б.Амберга (см., например, [1], лемма 1.17) $|G : H| < \infty$. Следовательно, ввиду теоремы Пуанкаре $|G : \bigcap\limits_{g \in G} H^g| < \infty$. Так как $\bigcap\limits_{g \in G} H^g$ — инвариантная локально конечная π-подгруппа группы G, то $\bigcap\limits_{g \in G} H^g = 1$. Следовательно, G конечна, и, значит, поскольку $G = AB$, $\pi(G) = \pi(A) \bigcup \pi(B) = \pi$. Поэтому $G = 1$).

Пусть выполняется условие 2) и K — произвольный конечный нормальный делитель подгруппы B. Так как $G = HB$ и $K \trianglelefteq B$, $K \subseteq \mathrm{H} \bigcap B$, то ввиду леммы С.А.Чунихина (см., например, [1], лемма 1.36) $\langle K^g \mid g \in G \rangle \subseteq H$. Следовательно, $\langle K^g \mid g \in G$ — нормальная в G локально конечная π-подгруппа и, значит, $\langle K^g \mid g \in G \rangle = 1$. Ввиду произвольности K $B = 1$ и $G = A$, а потому G — локально конечная π-группа и, значит, $G = 1$.

Положим $\mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_0$ и определим классы $\mathfrak{Y}_\alpha$, $\alpha > 0$, аналогично тому, как классы $\mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha > 1$ в доказательстве предложения 1. Тогда $\mathfrak{Y}$ есть объединение классов $\mathfrak{Y}_\alpha$. Пусть среди локально конечных $\mathfrak{Y}$-групп есть не локально разрешимые и γ — минимальное, для которого они есть в $\mathfrak{Y}_\gamma$; $X \in \mathfrak{Y}_\gamma$ — локально конечная не локально разрешимая группа. Так как, очевидно, γ непредельное, то X обладает некоторой локальной системой μ подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{Y}_{\gamma-1}$-факторами. Но каждый фактор такого ряда локально разрешим. Поэтому произвольная $Y \in \mu$, будучи локально конечной, локально разрешима. Следовательно, X — локально разрешима. Противоречие.

Пусть $G \in \mathfrak{Y}$. Так как группа G локально конечна, то по доказанному она локально разрешима.

Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть группа G локально разрешима и A, B локально нормальны. Ввиду утверждения 1 она локально конечна. Пусть $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — совокупность всех ее конечных подгрупп, порожденных нормальными делителями подгрупп A и B, и $A_\alpha = \bigcap\limits_{g\in A}(A\bigcap G_\alpha)^g$, $B_\alpha = \bigcap\limits_{g\in B}(B\bigcap G_\alpha)^g$.

Зафиксируем α. Ввиду леммы 1.12 [1] в G найдется конечная подгруппа F, такая, что $G_\alpha \subseteq F = (F\bigcap A)(F\bigcap B) \subseteq N_G(G_\alpha)$. В силу отмеченной выше теоремы [3] найдутся силовские p-подгруппы S_p группы F по одной для каждого простого p, такие, что $S_p\bigcap A$ и $S_p\bigcap B$ — силовские p-подгруппы групп $F\bigcap A$ и $F\bigcap B$, и для произвольного множества $\pi \neq \varnothing$ простых чисел $\langle S_p \mid p \in \pi\rangle$ — π-группа. Положим $H_{p\alpha} = S_p\bigcap G_\alpha$. Нетрудно видеть, что: а) для каждого p $H_{p\alpha}\bigcap A_\alpha$ и $H_{p\alpha}\bigcap B_\alpha$ — силовские p-подгруппы групп A_α и B_α; б) для произвольного $\pi \neq \varnothing$ $\langle H_{p\alpha} \mid p \in \pi\rangle$ — π-группа. Заметим, что $\langle H_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle$ и $\langle H_{p\alpha}\bigcap B_\alpha \mid p \in \pi\rangle$ — холловы π-подгруппы групп A_α и B_α. Обозначим через $\mathfrak{R}_\alpha$ множество (конечное) всех наборов $\{H_{p\alpha} \mid p \in \mathbb{P}\}$ p-подгрупп группы G_α по одной для каждого p, удовлетворяющих условиям а) и б).

Систему $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ частично упорядочим по правилу: $\mathfrak{R}_\alpha \leq \mathfrak{R}_\beta$ в том и только том случае, когда $G_\alpha \subseteq G_\beta$. Очевидно, для любых $\alpha \in I$ и $\beta \in I$ найдется $\gamma \in I$, при котором $\mathfrak{R}_\alpha$, $R_\beta \leq \mathfrak{R}_\gamma$. Нетрудно видеть, что в случае, когда $R_\alpha \leq \mathfrak{R}_\beta$, $\{H_{p\beta}\bigcap G_\alpha \mid p \in \mathbb{P}\} \in \mathfrak{R}_\alpha$. В этом случае определяем проекцию $\mathfrak{R}_\beta$ в $\mathfrak{R}_\alpha$, сопоставляя набору $\{H_{p\beta} \mid p \in \mathbb{P}\} \in \mathfrak{R}_\beta$ набор $\{H_{p\beta}\bigcap G_\alpha \mid p \in \mathbb{P}\} \in \mathfrak{R}_\beta$. Ввиду [5] (см. еще [6], стр. 351–353) в системе $\mathfrak{R}$ с определенными так проекциями существует полное проекционное множество. Следовательно, найдутся наборы $\{H^*_{p\beta} \mid p \in \mathbb{P}\}$ по одному в каждом $\mathfrak{R}_\alpha$, такие, что для любых двух из них $\{H^*_{p\alpha} \mid p \in \mathbb{P}\}$ и $\{H^*_{p\beta} \mid p \in \mathbb{P}\}$ найдется набор $\{H^*_{p\gamma} \mid p \in \mathbb{P}\}$, у которого при каждом p $H^*_{p\alpha}$, $H^*_{p\beta} \subseteq H^*_{p\gamma}$.

Положим для произвольного $\pi \neq \varnothing$ $G_\pi = \bigcup\limits_{\alpha\in I}\langle H^*_{p\alpha} \mid p \in \pi\rangle$, $A_\pi = \bigcup\limits_{\alpha\in I} H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle$ и $B_\pi = \bigcup\limits_{\alpha\in I} H^*_{p\alpha}\bigcap B_\alpha \mid p \in \pi\rangle$, и для произвольного p $A_p = A_{\{p\}}$, $B_p = B_{\{p\}}$. Нетрудно видеть, что для G_π $\{\langle H^*_{p\alpha} \mid p \in \pi\rangle \mid \alpha \in I\}$ — локальная система π-подгрупп. Следовательно, G_π — π-подгруппа группы G. Так как A_π, $B_\pi \subseteq G_\pi$, то $\langle A_\pi, B_\pi\rangle$ — π-подгруппа.

Пусть P — силовская π-подгруппа группы A, содержащая A_π, и $g \in P$. Тогда для некоторого α $g \in A_\alpha$. Так как $\langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle$ — холлова π-подгруппа группы A_α и $\langle g, \langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle\rangle$ — π-подгруппа группы A_α, то $g \in \langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle$. Поэтому ввиду произвольности g $A_\pi = P$, т.е. A_π — силовская π-подгруппа группы A. Точно так же B_π - силовская π-подгруппа группы B. В частности, при $\pi = \mathbb{P}$ $A_\mathbb{P} = A$ и $B_\mathbb{P} = B$.

Пусть $\pi = \sigma\bigcup\tau$ и $\sigma \neq \varnothing$, и $g \in A_\pi$. Тогда для некоторого α $g \in \langle H^*_{p\alpha} \mid p \in \pi$. В случае $\tau = \varnothing$ будем считать, что $\langle H^*_{p\alpha} \mid p \in \tau\rangle = 1$ и $A_\tau = 1$. Так как $H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \sigma$ и $H_{p\beta}\bigcap A_\alpha \mid p \in \tau\rangle$ — холловы соответственно σ- и τ-подгруппы группы $\langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle$, то $H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \pi\rangle == \langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \sigma\rangle\langle H^*_{p\alpha}\bigcap A_\alpha \mid p \in \tau\rangle$. Следовательно, $g \in A_\sigma A_\tau$. Поэтому ввиду произвольности g $A_\pi = A_\sigma A_\tau$. Точно так же $B_\pi = B_\sigma B_\tau$.

В силу доказанного для любых простых p и q $A_{\{p,q\}} = A_pA_q = A_qA_p$, $B_{\{p,q\}} = B_pB_q = B_qB_p$, т.е. подгруппы A_p, $p \in \mathbb{P}$ и B_p, $p \in \mathbb{P}$ попарно перестановочны.

Далее, ввиду доказанного $A = A_\mathbb{P} = A_\pi A_{\pi'}$, $B = B_\mathbb{P} = B_\pi B_{\pi'}$. Так как, к тому же $\langle A_\pi, B_\pi\rangle$ и $\langle A_{\pi'}, B_{\pi'}\rangle$ — соответственно π- и π'-подгруппы, то в силу леммы 2.24 [1] $A_\pi B_\pi$ — силовская π-подгруппа группы G.

Теорема доказана.

В заключение поставим

Вопрос. *Не будут ли попарно перестановочны подгруппы A_pB_p, $p \in \mathbb{P}$, из доказательства утверждения 2?*

Отметим, что в случае, когда A и B локально нильпотентны, подгруппы A_pB_p, $p \in \mathbb{P}$, попарно перестановочны ввиду теоремы 1 [7].

Abstract. Let $\mathfrak{X}$ be the minimal local class of groups closed with respect to forming of the ascending normal series and including the class of all locally almost solvable groups. Let $G \in \mathfrak{X}$, $G = AB$ where A and B are almost locally normal. It was proved that G is a locally finite π-group with $\pi = \pi(A)\bigcup\pi(B)$, and and if G is locally soluble and A, B are locally normal then for every prime p there exist permutable Sylow p-subgroups and in A and B such that for an arbitrary set $\pi \neq \varnothing$ of primes $\prod_{p\in\pi} A_p$, $\prod_{p\in\pi} B_p$ and $(\prod_{p\in\pi} A_p)(\prod_{p\in\pi} B_p)$ are Sylow π-subgroups of groups A, B and G respectively. An analogous result was obtained for the case wehn A is locally and B is hyperfinite.

Литература

[1] Н.С.Черников, *Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп,* Киев, Наукова думка, 1987.

[2] Н.С.Черников, *Факторизация бесконечных групп при условиях конечности,* Докл. АН УССР. Сер. А., 5 (1985), 26–29.

[3] Н.С.Черников, *Силовские подгруппы факторизуемых периодических линейных групп,* Подгрупповая характеризация групп, Киев: Институт математики АН УССР, 1982, 35–52.

[4] H.Heineken, *Maximale p-Untergruppen lokal endlicher Gruppen,* Arch. Math. 23:2 (1972), 351–361.

[5] С.Н.Черников, *К теории локально разрешимых групп,* Мат. сб., 19:2–3 (1943), 317–333.

[6] А.Г.Курош, *Теория групп,* Москва, Наука, 1967.

[7] Н.С.Черников, *Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами,* Вопросы алгебры (Гомель) 11 (1997), 90–115.

Поступило 5.06.2000

Н.С.Черников
Институт математики НАН Украины
01601 Киев 4
Украина

С.В.Путилов
Брянский государственный
педагогический университет
им. И.Г.Петровского
241036 Брянск, Россия