

О конечных группах, не порождающихся своими нециклическими 2-максимальными подгруппами

Н.Н.СЕМКО

Посвящается профессору В.Гашпоцу в связи с его 80-летием

В теории групп широко известны задачи описания групп G , которые не порождаются системой Σ всех своих подгрупп определенного типа. Например, Σ — система всех таких подгрупп: порядка p^α , $\alpha > 0$; собственных; собственных немаксимальных; собственных нециклических; собственных немаксимальных нециклических. Группы такого рода изучались М. Холлом, С.Н. Черниковым и многими другими авторами. В работе [1, теорема 1.1.1] описаны все локально ступенчатые группы, которые не порождаются своими собственными немаксимальными подгруппами. В настоящей работе описаны все такие не порождающиеся своими нециклическими 2-максимальными подгруппами конечные группы G , которые содержат нормальную подгруппу N типа (p, p) , что G/N — примарная группа.

Из теоремы 1.1.1 работы [1] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Конечные примарные группы G , которые не порождаются своими 2-максимальными подгруппами, исчерпываются группами типов:

- 1) $G = \langle a \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, p — простое число;
- 2) $G = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов порядка 8;
- 3) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p — простое число, при $|a| = 4$ $|[a, b]| \neq 2$.

Лемма 2. Все конечные группы G , которые не порождаются своими нециклическими 2-максимальными подгруппами и имеют такую нормальную подгруппу N типа (p, p) , для которой G/N — примарная циклическая группа (p — простое число), исчерпываются группами типов:

- 1) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$;
- 2) $G = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle a \rangle$, $|c| = |d| = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $|a| = q^\Delta$, $\Delta > 0$, p, q — не обязательно различные простые числа;
- 3) $G = (\langle a \rangle \times \langle d \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $|c| = |d| = p$, $|a| = q^\Delta$, $\Delta > 0$, p, q — различные простые числа, элемент a индуцирует на $(\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ неприводимый автоморфизм.

Доказательство. Необходимость. Пусть G и N удовлетворяют условию леммы. Тогда G содержит нормальную подгруппу N типа (p, p) и G/N — примарная циклическая группа. Отсюда $G = N \cdot \langle a \rangle$, где $|a| = q^\Delta$, $\Delta \geq 0$, q — не обязательно отличное от p простое число. Если $G = N$, то G — группа типа 1.

Пусть $G < N$. Тогда $\Delta > 0$, $N \cap \langle a \rangle \leq \langle a^q \rangle$. Предположим, что $N \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тогда $\omega(\langle a \rangle) \leq N$, а значит, $p = q$ и $\Delta > 1$. Понятно, что $\langle a \rangle$ — максимальная подгруппа p -группы G . Отсюда N содержит d , $d \notin \langle a \rangle$, $G = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $G' \leq N \cap \langle a \rangle = \omega(\langle a \rangle)$. Положим $\Delta = \alpha$ и получим, что G — группа типа 1.

Пусть $N \cap \langle a \rangle = 1$. Тогда $G = N \rtimes \langle a \rangle$. Предположим, что N содержит c , $|c| = p$ и $\langle c \rangle \triangleleft G$. Тогда $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|d| = p$ и G — группа типа 2. Предположим, что N не содержит нормальных в G подгрупп порядка p . Тогда a индуцирует на N неприводимый автоморфизм. Понятно, что $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$ — простое число, отличное от q и G — группа типа 3. Необходимость доказана.

Достаточность устанавливается непосредственной проверкой. Лемма доказана.

Лемма 3. Все конечные группы G , которые не порождаются нециклическими 2-максимальными подгруппами и имеют такую нормальную подгруппу N типа (p, p) , для которой G/N — группа кватернионов порядка 8, исчерпываются группами типов:

- 1) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

2) $G = P \rtimes Q$ — группа Фробениуса, P — силовская подгруппа группы G типа (p, p) , $p > 2$, $Q = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов порядка 8, любой элемент v из Q , который не принадлежит $\langle b \rangle$, индуцирует на P неприводимый автоморфизм.

Доказательство. Необходимость. Пусть G и N удовлетворяют условию леммы и M — подгруппа, порожденная всеми нециклическими 2-максимальными подгруппами. Тогда $M < G$ и $M \triangleleft G$. Понятно, что N принадлежит некоторой нециклической 2-максимальной подгруппе группы G , а значит, $N \leq M$. Пусть Φ/N — подгруппа Фраттини группы кватернионов G/N . Тогда Φ — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G , $\Phi \leq M$ и $\Phi \triangleleft G$. Рассмотрим далее два возможных случая: 1) подгруппа N дополняется в G ; 2) подгруппа N не дополняется в G .

Случай 1. В этом случае $G = N \rtimes Q$, где $Q = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов порядка 8. Предположим, что $p = 2$. Тогда G — 2-группа и N содержит c , $|c| = 2$, $c \in Z(G)$. Ясно, что в G существуют нециклические 2-максимальные подгруппы $M_1 = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $M_2 = \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, а значит, $M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$, $Q = \langle a, b \rangle \leq M$. Но тогда $M = G$, что не так. Следовательно, $p > 2$.

Если Q — не максимальная в G , то $Q \leq M$ и потому $M = G$, что невозможно. Таким образом, Q — максимальная подгруппа из G . Но тогда N — минимальная нормальная подгруппа из G и G — ненильпотентная группа. Отсюда G содержит подгруппу Шмидта $S = P_1 \rtimes \langle d \rangle$, где не нарушая общности можно считать, что $d \in Q$, $\langle d \rangle$ — ненормальная силовская 2-подгруппа из S , $P_1 = S \cap N$ — нормальная силовская p -подгруппа из S . Из строения групп Шмидта (см., например, [2, теорема 2.1.1.]) получаем, что $|P_1| = p$. По теореме Машке [3, теорема 20.2.2] $N = P_1 \times P_2$, $|P_2| = p$, $[\langle d \rangle, P_2] \leq P_2$. Понятно, что $|d| \in \{2, 4\}$.

Предположим, что $|d| = 4$. Положим $T = N \cdot S$. Понятно, что S — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G и, значит, $S \leq M$, $T = N \rtimes \langle d \rangle$, $[G : T] = 2$. Отсюда $T = M$.

Пусть $[\langle d \rangle, P_2] = 1$. Тогда $P_2 \leq Z(M) = Z(T)$ и, значит, $P_2 \triangleleft G$, что противоречит минимальности нормальности N в G . Следовательно, $[\langle d \rangle, P_2] = P_2$. Понятно, что $Z(S) = \langle d^2 \rangle = \Phi(Q)$. Не нарушая общности можно считать, что $\langle d \rangle \neq \langle a \rangle$. Тогда $Q = \langle a, d \rangle$. Предположим, что $[N, \langle a \rangle] = 1$. Не нарушая общности можно считать, что $b = ad$. Тогда $b^{-1}P_1b = (ad)^{-1}P_1(ad) = d^{-1}P_1d = P_1$. Поскольку $[P_1, \langle d \rangle] = P_1$, то $[P_1, \langle b \rangle] = P_1$. Отсюда $P_1 \times \langle b \rangle$ — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G и потому $P_1 \rtimes \langle b \rangle \leq M$, $ad = b \in M$, а значит, $Q \leq M$, что невозможно. Следовательно, $[N, \langle a \rangle] \neq 1$ и потому $N \rtimes \langle a \rangle$ — ненильпотентная нормальная в G подгруппа.

Понятно, что $[P_1, \langle d^2 \rangle] = 1$. Предположим, что $[P_2, \langle d^2 \rangle] \neq 1$. Тогда $[P_2, \langle d^2 \rangle] = P_2$. Из этого следует, что P_1 — силовская p -подгруппа центра нормальной в G подгруппы Φ . Но тогда $P_1 \triangleleft G$, что противоречит минимальности нормальности P в G . Следовательно, $[P_1, \langle d^2 \rangle] = 1$, а значит, $d^2 \in Z(G)$. Понятно, что $N \rtimes \langle a \rangle$ содержит подгруппу Шмидта $S_1 = P_3 \rtimes \langle a_1 \rangle$, где P_3 — нормальная силовская p -подгруппа из S_1 , $\langle a_1 \rangle$ — ненормальная силовская 2-подгруппа из S_1 . Поскольку $\langle a^2 \rangle = \langle d^2 \rangle \leq Z(G)$, то $|a_1| > 2$. Не нарушая общности можно считать, что $\langle a_1 \rangle = \langle a \rangle$. Отсюда $|P_3| = p$ и потому S_1 — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G , $a \in S_1 \leq M$, а значит, $\langle a, d \rangle = Q \leq M$, что невозможно. Следовательно, предположение $|d| = 4$ приводит к противоречию. Отсюда $|d| = 2$.

Предположим, что $[P_2, \langle d \rangle] = 1$. Тогда P_2 — силовская подгруппа из $Z(\Phi)$ и, значит, $P_2 \triangleleft G$, что противоречит минимальности нормальности N в G . Таким образом, $[P_2, \langle d \rangle] = P_2$. Поскольку $|d| = 2$, d — единая инволюция из Q , которая, очевидно, содержится в каждой неединичной подгруппе из Q и индуцирует на N регулярный автоморфизм, то любой неединичный элемент из Q индуцирует на N регулярный автоморфизм. Отсюда не существует неединичного элемента x из N и неединичного элемента y из Q , для которых $[x, y] = 1$ и потому в силу [4] G — группа Фробениуса.

Предположим, что a и b индуцируют на N приводимый автоморфизм. Поскольку G — ненильпотентная группа, то не нарушая общности можно считать, что $[N, \langle b \rangle] \neq 1$.

Как и ранее, можно показать, что $N = P_1 \times P_2$, $|P_1| = |P_2| = p$, $[P_1, \langle b \rangle] = P_1$. Отсюда $P_1 \rtimes \langle b \rangle$ — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G и потому $b \in M$. Отсюда легко следует, что $Q \leq M$, что не так. Из предположения, что $v \in Q \setminus \langle b \rangle$ индуцирует на N приводимый автоморфизм, можно, как и для b получить, что $N = P_3 \times P_4$, $|P_3| = |P_4| = p$, $[P_3, \langle v \rangle] = P_3$. Отсюда $P_3 \rtimes \langle v \rangle$ — нециклическая 2-максимальная подгруппа из G и, значит, $v \in M$. Тогда $Q \leq M$, что невозможно. Следовательно, v индуцирует на N неприводимый автоморфизм и G — группа типа 2 рассматриваемой леммы. Случай 1 рассмотрели полностью.

Случай 2. 1 В этом случае $p = 2$, G — 2-группа и потому $|G| = 2^5$, $G = A \cdot B$, $A = N\langle a \rangle$, $B = N\langle b \rangle$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \cap B = \Phi$, $|A| = 2^\alpha$, $\alpha > 1$, $|B| = 2^\beta$, $\beta > 1$, $|Na| = |Nb| = 4$.

Предположим, что $N \leq Z(G)$. Тогда из недополняемости N в G и в силу утверждения 1.1.11 из [5] $G = N \cdot H$, где $H = \langle u \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|u| = |v| = 4$, $[u, v] = u^2$, $N \cap \langle u \rangle = \langle c \rangle$, $c = u^2v^2$, $G' = \langle u^2 \rangle$. Ясно, что $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|d| = 2$, $d \notin H$. Отсюда $\langle d \rangle \times \langle u \rangle$, $\langle d \rangle \times \langle v \rangle$ — нециклические 2-максимальные подгруппы из G . Поэтому $u \in M$, $v \in M$, $H \leq M$, что невозможно. Следовательно, $N \not\leq Z(G)$.

Пусть $C = C_G(N)$. Тогда $C \triangleleft G$, $C < G$ и G/C — изоморфная группе из $\text{Aut}N$. Известно [6], что силовские 2-подгруппы с $\text{Aut}N$ порядка 2. Отсюда $[G : C] = 2$. Понятно, что $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = 2$, $c \in Z(C)$. Предположим, что $N \cap \langle b \rangle = N \cap \langle a \rangle = 1$. Тогда в G существуют нециклические 2-максимальные подгруппы $\langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $\langle c \rangle \times \langle b \rangle$, и, значит, $a \in M$, $b \in M$, $M = G$, что не так. Следовательно, не нарушая общности можно считать, что $N \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тогда $|a| = 2^3$. Понятно, что $A = \langle a \rangle \rtimes \langle v \rangle$, $|v| = 2$. Поскольку $[G : C] = 2$, то $a^2 \in C$ и, значит, $a^2 \in Z(A)$. В силу теоремы 12.1.5 из [7] $[\langle a \rangle, \langle v \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$. Понятно, что $\langle a^2 \rangle = \Phi(A) \triangleleft G$, а значит, $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(\langle a^2 \rangle) = \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$. Поэтому не нарушая общности $\omega(\langle a \rangle) = \langle c \rangle$, $\langle v \rangle = \langle d \rangle$. Ясно, что $[G : A] = 2$, $b \notin A$, $b^2 \in A$, $|b| \in \{4, 8\}$, $\omega(A) = N$.

Предположим, что $|b| = 4$. Если при этом $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle = 1$, то $B = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, $\Phi(A) = \langle b^2 \rangle \triangleleft G$. Но тогда $N = \omega(\langle a \rangle) \times \omega(\langle b \rangle) \leq Z(G)$, что не так. Следовательно, $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тогда $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle = \langle b \rangle \cap A = \langle c \rangle$ и, значит, $G/N = \langle Na \rangle \rtimes \langle Nb \rangle$, что невозможно. Таким образом, $|b| = 8$.

Ясно, что $b^2 \in \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$ и $|a^2| = |b^2| = 4$. Отсюда $b^4 \in \langle a^4 \rangle$, а значит, $\langle b \rangle \cap \langle a \rangle$ содержит c . Положим $F = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle$. Тогда $F \triangleleft G$, $[G : F] = 4$ и потому G/F — абелева группа. Положим $f = [a, b]$. Тогда из неабелевости G/N вытекает, что $F \not\leq N = \omega(F)$. Поскольку F — группа типа $(4, 2)$, то $|f| = 4$. В группе F существуют только две различные циклические подгруппы $\langle a^2 \rangle$ и $\langle a^2d \rangle$ порядка 4. Поскольку $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$ и $F \triangleleft G$, то $\langle a^2d \rangle \triangleleft G$. Понятно, что $\langle f \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle a^2d \rangle\}$. Но тогда $\langle f \rangle \triangleleft G$ и $G' = \langle f \rangle$. Легко видеть, что $\langle a \rangle \cap \langle d \rangle = \langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$. За предыдущим $[G : C] = 2$. Отсюда не нарушая общности можно считать, что $a \in C$. Следовательно, $[a, d] = 1$ и потому $A = \langle a \rangle \times \langle d \rangle$.

Предположим, что $\langle a^2 \rangle \leq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Тогда $\langle a^2 \rangle \leq Z(G)$ и $[a, f] = 1$. Отсюда $1 = [a^2, b] = [a, b]^2 = f^2$, что не так. Следовательно, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle c \rangle$ и, значит, $\langle b^2 \rangle = \langle a^2d \rangle$. Но тогда $A = \langle a \rangle \langle b^2 \rangle$. Понятно, что $F = \Phi(G)$ и $\langle f \rangle \in \{\langle a^2 \rangle, \langle b^2 \rangle\}$. Отсюда $\langle a \rangle \triangleleft G$ или $\langle b \rangle \triangleleft G$ и $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$. Не нарушая общности можно считать, что $f \in \langle a \rangle$. Тогда $f = \langle a^2 \rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ и G — группа типа 1 рассматриваемой леммы. Необходимость доказана. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой. Лемма доказана.

Лемма 4. Все конечные группы G , которые порождаются нециклическими 2-максимальными подгруппами и имеют такую нормальную подгруппу N типа (p, p) , что G/N — группа типа 3 леммы 1, исчерпываются группами типов:

- 1) G — группа порядка p^4 экспоненты p^2 , у которой $|w(G)| \in \{p^2, p^3\}$;
- 2) $G = A \cdot \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle \rtimes \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 2$, $|d| = p$, $|b| \in \{p, p^2\}$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $|[a, b]| < p^3$, при $|a| = 8$ $[a, b] \neq 4$;

3) $G = P \rtimes Q$, P — минимальная нормальная подгруппа группы G типа (p, p) , $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, a индуцирует на P неприводимый автоморфизм, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p и q — различные простые числа, при $|a| = 4$ $||a, b|| \neq 2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G и N удовлетворяют условию леммы, M — подгруппа, порожденная всеми нециклическими 2-максимальными подгруппами из G . Тогда $M \triangleleft G$ и $M < G$. Поскольку, очевидно, N — нециклическая немаксимальная подгруппа из G , то $N \leq M$. Рассмотрим далее два возможных случая: 1) подгруппа N дополняется в G ; 2) подгруппа не дополняется G .

Случай 1. В этом случае $G = N \rtimes Q$, где Q — группа типа 3 леммы 1, для которой $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$, при $|a| = 4$ $||a, b|| \neq 2$. Понятно, что Q — собственная подгруппа из G . Предположим, что Q принадлежит некоторой 2-максимальной подгруппе группы G . Тогда $Q \leq M$ и, значит, $N \cdot Q = G \leq M = G$, что не так. Отсюда Q — максимальная подгруппа группы G и N — минимальная нормальная подгруппа из G . Но тогда p и q различные простые числа и $N = P$ — силовская p -подгруппа группы $G = P \rtimes Q$. Понятно, что G — не нильпотентная группа.

Предположим, что $\gamma < 2$. Тогда Q — силовская q -подгруппа типа (q, q) и Q содержит такой элемент x , что $[P, \langle x \rangle] \neq 1$. Ясно, что $|x| = q$. Если x индуцирует на P неприводимый автоморфизм, то не нарушая общности можно считать, что $x = a$ и G — группа типа 3 рассматриваемой леммы.

Предположим, что любой неединичный элемент x из Q индуцирует на P приводимый автоморфизм. Пусть $[P, \langle x \rangle] = 1$. Тогда $Q = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$, $|y| = |x| = q$ и $[P, \langle y \rangle] \neq 1$. По предположению y индуцирует на P приводимый автоморфизм. Поэтому по теореме Машке [3, теорема 20.2.2.] $P = P_1 \times P_2$, $|P_1| = |P_2| = p$, $[P_1, \langle y \rangle] \leq P_1$. Из этого следует, что в G существует подгруппа $P_1 \rtimes Q$, что противоречит максимальной Q в G . Следовательно, y индуцирует на P неприводимый автоморфизм. Положим $y = a$, $x = b$ и получим, что G — группа типа 3. Пусть далее $[P, \langle y \rangle] \neq 1$. Понятно, что $Q = \langle y \rangle \times \langle x \rangle$, $|y| = q$. В силу отмеченного ранее $[P, \langle y \rangle] \neq 1$. Поскольку G не является группой Фробениуса, то не нарушая общности можно считать, что существует u из P , $|u| = p$ и $[u, y] = 1$. Положим $F = P \rtimes \langle y \rangle$. Тогда F — нильпотентная нормальная подгруппа из G , центр которой содержит элемент u . Очевидно, что $y \in Z(F)$. Отсюда $Z(F) = \langle u \rangle$, и, значит, $\langle u \rangle \triangleleft G$. Следовательно, существует собственная подгруппа $\langle u \rangle \rtimes Q$, что противоречит максимальной Q в G . Таким образом, при $\gamma < 2$ G — группа типа 3 рассматриваемой леммы.

Предположим, что $\gamma > 1$. Понятно, что $P \rtimes \langle a^q \rangle$ и $P \rtimes \langle b \rangle$ — нециклические подгруппы, которые принадлежат M . Отсюда $P \rtimes (\langle a^q \rangle \times \langle b \rangle) = M_1 \leq M$, а значит, $M_1 = M$ — максимальная подгруппа группы G . Если a индуцирует на P неприводимый автоморфизм, то G — группа типа 3. Пусть a индуцирует на P приводимый автоморфизм. Тогда по теореме Машке [3, теорема 20.2.2.] $P = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$, $[\langle a \rangle, \langle c \rangle] \leq \langle c \rangle$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \leq \langle d \rangle$.

Пусть $[P, \langle a \rangle] = 1$. Поскольку G — не нильпотентная группа, то $[P, \langle b \rangle] \neq 1$. Покажем, что b индуцирует на P неприводимый автоморфизм. Предположим, что это не так. Тогда не нарушая общности можно считать, что $[\langle c \rangle, \langle b \rangle] \leq \langle c \rangle$, $[\langle d \rangle, \langle b \rangle] = \langle d \rangle$. Положим $a_1 = a \cdot b$. Тогда G имеет нециклическую подгруппу $F = \langle d \rangle \rtimes \langle a_1 \rangle$. Понятно, что $F \leq M$. Отсюда $a_1 \in M$, $a \in M$ и $M = G$, что невозможно. Следовательно, b индуцирует на P неприводимый автоморфизм. Положим $a_1 = a \cdot b$. Поскольку $[P, \langle a \rangle] = 1$, то a_1 индуцирует на P неприводимый автоморфизм и поскольку при $|a| = 4$ $||a, b|| \neq 2$, то $\langle a^q \rangle = \langle a_1^q \rangle$. Не нарушая общности можно считать, что $a_1 = a$ и G — группы типа 3 рассматриваемой леммы.

Предположим далее, что $[P, \langle a \rangle] \neq 1$. Тогда можно считать, что $[\langle d \rangle, \langle a \rangle] = \langle d \rangle$. Отсюда $\langle d \rangle \rtimes \langle a \rangle \leq M = G$, что невозможно.

Следовательно, в этом случае G — группа типа 3 рассматриваемой леммы.

Случай 2. В этом случае G — p -группа и $|G/N| = p^\gamma$, $\gamma > 1$.

Предположим, что $\gamma < 3$. Тогда $\gamma = 2$ и $|G| = p^4$. Понятно, что G имеет центральную подгруппу $\langle c \rangle$ порядка p . Пусть $x \in G$, $|x| = p$ и $x \notin \langle c \rangle$. Тогда $\langle c \rangle \times \langle x \rangle$ — нециклическая подгруппа и, очевидно, $\langle c \rangle \times \langle x \rangle \leq M$. Отсюда $x \in M$, а значит, $\omega(G) \leq M$. Поскольку $N \leq M$, то $|\omega(G)| \in \{p^2, p^3\}$. Понятно, что $\exp(G) > p$ и $\exp(G) < p^4$. Пусть $\exp(G) = p^3$. Тогда G имеет циклическую максимальную подгруппу $\langle u \rangle$, $|u| = p^3$, $G = \langle u \rangle \cdot N$ и G/N — циклическая группа, что невозможно. Следовательно, $\exp(G) = p^2$ и G — группа типа 1 рассматриваемой леммы.

Предположим, что $\gamma > 3$. Тогда $G/N = A/N \lambda B/N$, где A/N — циклическая группа порядка p^Δ , $\Delta > 0$, B/N — циклическая группа порядка p . Отсюда $G = A \cdot B$, $A \cap B = N$, $A = N \cdot \langle a \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $N \cap \langle a \rangle = \langle a^{p^\Delta} \rangle$, $B = N \cdot \langle b \rangle$, $N \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $|b| \in \{p, p^2\}$. Поскольку $\gamma > 0$, то $\Delta > 1$. Ясно, что $B \leq M$, $N = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d| = p$, $c \in Z(G)$.

Пусть $\Delta = \alpha$. Тогда $A = N \lambda \langle a \rangle$, G содержит нециклическую подгруппу $F = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$, $[G : F] > p$ и поэтому $F \leq M = G$, что не так. Отсюда $\alpha = \Delta + 1$, а значит, $\alpha > 2$. Не нарушая общности можно считать, что $A = \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|d| = p$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \leq \omega(\langle a \rangle)$. Понятно, что $A \triangleleft G$, $\langle a \rangle$ — максимальная нециклическая подгруппа из A . В силу теоремы 12.5.1 из [7] $\omega(A) = N = \omega(\langle a \rangle) \times \langle d \rangle$. Понятно, что $A \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $|b^p| \in \{1, p\}$. Отсюда $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle$ и поэтому $|a| \geq 8$.

Если $|a| > 8$, то G — группа типа 3.

Пусть $|a| = 8$ и пусть $f = [a, b]$. При $|f| \neq 4$ G — группа типа 3. Предположим, что $|f| = 4$. Ясно, что $f \in G' \leq A$, $\Phi(A) = \langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $|a^2| = 4$ и, значит, $f \in U = \langle a^2 \rangle \times \langle d \rangle = \langle a^2 \rangle \cdot N$, $\langle a^2 \rangle \cap N = \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$. Легко видеть, что $U/\omega(\langle a \rangle) = \langle a^2 \rangle/\omega(\langle a \rangle) \times N/\omega(\langle a \rangle)$. Поскольку $N \triangleleft G$ и $\langle a^2 \rangle \triangleleft G$, $|\langle a^2 \rangle/\omega(\langle a \rangle)| = 2$, $N/\omega(\langle a \rangle) = 2$, а значит $\langle a^2 \rangle/\omega(\langle a \rangle) \triangleleft G/\omega(\langle a \rangle)$, $N/\omega(\langle a \rangle) \triangleleft G/\omega(\langle a \rangle)$, $\langle a^2 \rangle/\omega(\langle b \rangle) \leq Z(G/\omega(\langle a \rangle))$, $N/\omega(\langle a \rangle) \leq Z(G/\omega(\langle a \rangle))$. Отсюда $[U, G] \leq \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$ и поэтому класс nilпотентности G не превышает 3. Понятно, что $\omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle b \rangle)$. Положим $v = ab$. Поскольку $[G', G] \leq Z(G)$, то в силу предложения 1.1.10 из [5] $v^2 = b^2 a^2 f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$, где $f_1 = [a, b]^3 [[a, b], a]^2 \cdot [[a, b], b]$, $\langle b^2, f_2, f_3, [[a, b], a], [[a, b], b] \rangle \leq \omega(A)$. Положим $h = f_2 f_3 [[a, b], a] [[a, b], b]$. Тогда $|h| \leq 2$. Поскольку $b^2 \in \omega(A)$ и $a^2 \in Z(A)$, то $v^2 = a^2 f^3 h$. Отсюда $v^4 = a^4 f^6 h^2 = a^4 \cdot a^4 = 1$. Следовательно, $|v| < 8$. Положим $V = N \cdot \langle v \rangle$. Понятно, что $|G| = 2^5$, V — нециклическая группа, $|V| < 2^5$. Если $|V| < 2^4$, то $V \leq M$ и поэтому $V \in M$. Отсюда вытекает, что $a \in M = G$, что не так. Следовательно $|V| = 2^4$. Тогда $N \cap \langle v \rangle = 1$ и $V = N \lambda \langle v \rangle$. Отсюда $\langle c \rangle \times \langle v \rangle \leq M$ и потому $M = G$, что невозможно. Все случаи рассмотрели. Необходимость доказана.

Достаточность устанавливается непосредственной проверкой. Лемма доказана.

Из лемм 1–4 вытекает

Теорема. Все конечные группы G , которые не порождаются своими нециклическими 2-максимальными подгруппами и имеют такую нормальную подгруппу N типа (p, p) , что G/N — примарная группа, которая не порождается своими 2-максимальными подгруппами, исчерпываются группами типов:

- 1) $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$, $|b| = p$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$;
- 2) $G = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle a \rangle$, $|c| = |d| = p$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, $|a| = q^\Delta$, $\Delta > 0$, p и q — не обязательно различные простые числа;
- 3) $G = (\langle a \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle a \rangle$, $|c| = |d| = p$, $|a| = q^\Delta$, $\Delta > 0$, p и q — различные простые числа, элемент a индуцирует на $(\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ неприводимый автоморфизм;
- 4) $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;
- 5) $G = P \lambda Q$ — группа Фробениуса, P — силовская подгруппа группы G типа (p, p) , $p > 2$, $Q = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов порядка 8, любой элемент v из Q , который не содержится в $\langle b \rangle$, индуцирует на P неприводимый автоморфизм;
- 6) G — группа порядка p^4 экспоненты p^2 , у которой $|\omega(G)| \in \{p^2, p^3\}$;
- 7) $G = A \cdot \langle b \rangle$, $A = \langle a \rangle \lambda \langle d \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 2$, $|d| = p$, $|b| \in \{p, p^2\}$, $[\langle a \rangle, \langle d \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, $A \cap \langle b \rangle = \omega(A) \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle$, $[[a, b]] < p^3$, при $|a| = 8$ $[[a, b]] \neq 4$;

8) $G = P \rtimes Q$, P — минимальная нормальная подгруппа группы G типа (p, p) , $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\gamma$, $\gamma > 0$, $|b| = q$, a индуцирует на P неприводимый автоморфизм, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] \in \omega(\langle a \rangle)$, p и q — различные простые числа, при $|a| = 4|a, b| \neq 2$.

Abstract. The author describes a subgroups structure of a finite group G satisfying the following conditions: 1) G is not generated by its non-cyclic 2-maximal subgroups; 2) G contains a normal subgroup N of type (p, p) such that G/N is a primary group.

Литература

- [1] М.М.Семко, *Групи з умовами щільності нормальності та їх узагальнення для деяких систем підгруп*, К., Ін-т математики НАН України, 1998.
- [2] С.С.Левищенко, Н.Ф.Кузенный, *Конечные группы с системами дисперсивных подгруп*, К., Ін-т математики НАН України, 1997.
- [3] М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, *Основы теории групп*, М., Наука, 1982.
- [4] В.М.Бусаркин, Ю.М.Горчаков, *Конечные расщепляемые группы*, М., Наука, 1967.
- [5] М.Ф.Кузенный, М.М.Семко, *Метагамільтонові групи та їх узагальнення*, К., Ін-т математики НАН України, 1996.
- [6] А.Г.Курош, *Теория групп*, М., Наука, 1967.
- [7] М.Холл, *Теория групп*, М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Академия налоговой службы Украины
Украина, Киевская область, г.Ирпень
улица Карла Маркса 31,
кафедра высшей математики и
математических методов в экономике

Поступило 6.06.2000