Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(16) Вопросы алгебры (2000), 191–194
2000 Mathematics Subject Classification: 20D20

Конечные группы с холловыми π-подгруппами четного порядка

В.Н.Тютянов

Посвящается профессору В.Гашюцу в связи с его 80-летием

В своей работе (теорема 2.3 [1]) Л.С.Казарин с использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп показал, что конечная группа с 2-разложимой холловой подгруппой F четного порядка, если $\pi = \pi(F) \setminus \{2\} \neq \varnothing$, является π-разрешимой. Это является дополнением классического результата Х.Виландта [2]. Дальнейшие усиления теоремы 2.3 [1] в общем случае не представляются возможными, так как, например, в группах $L_2(q)$ при некоторых нечетных значениях параметра q имеются холловы диэдральные подгруппы порядков $q \pm 1$. Настоящая работа дополняет результаты из [1] и [2]. Отметим, что в доказательствах некоторых теорем мы не использовали теорему о классификации простых неабелевых групп.

В статье рассматриваются только конечные группы. Обозначения и терминологию можно найти, например, в [3] и [4]. Для удобства читателя приведем некоторые обозначения и определения. Если π есть некоторое фиксированное множество простых чисел, то символ π' будет обозначать множество простых чисел, не принадлежащих π. Конечная группа называется π-группой, если её порядок является π-числом. π-Подгруппа F конечной группы G называется холловой π-подгруппой в G, если $|G : F|$ — π'-число. Группа G называется π-разложимой, если она является прямым произведением двух своих холловых π и π'-подгрупп. Для конечной группы G обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей её порядка.

Будем говорить, что некоторая группа G является E_π-группой, если она обладает хотя бы одной холловой π-подгруппой. D_π-группа — группа, обладающая свойством E_π, причем все ее холловы π-подгруппы сопряжены и любая π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G.

Вспомогательные результаты

1. Определение. Пусть G — конечная группа четного порядка и $p \in \pi(G)\setminus\{2\}$. Группу G назовем $Z(p)$-группой, если она удовлетворяет следующим условиям:

(a) G содержит 2-замкнутую холлову $\{2,p\}$-подгруппу;

(b) всякая секция H группы G для которой $\pi(H) = \{2,p\}$ является 2-замкнутой группой.

Лемма 1. *Пусть G — простая спорадическая группа, $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Тогда $C_G(T) \subseteq T$.*

Доказательство. Данное утверждение следует из свойств спорадических групп, перечисленных в [5].

Лемма 2 (теорема A4 [6]). *Пусть S_n — симметрическая группа степени n и $r < s \leq n$, где r и s являются простыми числами. Тогда S_n имеет холлову $\{r,s\}$-подгруппу, если $r = 2$, $s = 3$ и $n = 3, 4, 5, 7, 8$.*

Лемма 3 ((1.3) [1]). *Пусть $G = G(q)$ — конечная простая группа Шевалле (нормального или скрученного типа), определенная над полем нечетной характеристики*

p, T — ее силовская 2-подгруппа, содержащая некоторую силовскую 2-подгруппу группы $N = N_G(H)$, где H — подгруппа Картана группы G. Тогда выполнены следующие утверждения:

(a) $O(C_G(T)) \subseteq H$;

(b) если ранг G больше 1, то для любых $r \in \pi(O(H))$ и $Q \in \mathrm{Syl}_r(H)$ справедливо соотношение $[Q, T] \neq 1$.

Лемма 4 ((1.7) [1]). *Если G — простая группа Шевалле характеристики p нормального или скрученного типа, то силовская p-подгруппа группы G самоцентрализуема.*

Лемма 5. *Пусть $G \cong A_1(q)$, где $q = p^n$ и p — нечетное простое число. Тогда для всякого $r \in \pi(G) \setminus \{2, p\}$ группа G содержит подгруппу изоморфную $\mathbb{Z}_r \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$ и, следовательно, не является $Z(r)$-группой.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы Диксона (теорема 8.27 [7]).

Лемма 6 ((1.5) [1]). *Пусть G — простая группа Шевалле и L — максимальная подгруппа в G. Если унипотентная подгруппа $U \subseteq L$, то L — параболическая подгруппа G.*

Лемма 7. *Пусть G — конечная $Z(p)$-группа и $S \leftthreetimes P$ — её холлова $\{2, p\}$-подгруппа, где $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если $C_P(S) \neq 1$, то G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что G — простая неабелева группа. Тогда возможны следующие случаи.

1. G — простая спорадическая группа.

Из леммы 1 следует, что G не является $Z(p)$-группой для всех $p \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Поэтому данный случай невозможен.

2. G — простая знакопеременная группа.

Пусть $G \cong A_n$, $n \geq 5$. Ясно, что S_n содержит бипримарную холлову $\{2, p\}$-подгруппу. Из леммы 2 следует, что $p = 3$, а $n = 5, 7, 8$. Группа A_5 содержит подгруппу, которая изоморфна $\mathbb{Z}_3 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$. Так как $A_5 \subset A_7 \subset A_8$, то группа G не является $Z(3)$-группой. Следовательно, G не может быть простой знакопеременной группой.

3. G — простая группа лиевского типа.

Из леммы 4 следует, что группа G определена над полем нечетной характеристики. Пусть сначала лиевский ранг группы G равен единице. Тогда $G \in \{{}^2G_2(q), L_2(q), U_3(q)\}$, где $q \equiv 1 \pmod 2$. В группах $Ри$ силовская 2-подгруппа совпадает со своим централизатором, поэтому $G \not\cong {}^2G_2(q)$. Из леммы 5 и леммы 6 следует, что $G \not\cong L_2(q)$. Следовательно, $G \cong U_3(q)$. Имеет место включение $U_2(q) \subset U_3(q)$, где $U_2(q) \cong A_1(q)$. Из леммы 3 заключаем, что $p \mid (q^2 - 1)$. Но тогда, согласно лемме 5, группа G не является $Z(p)$-группой.

Таким образом, лиевский ранг группы G больше единицы. Согласно лемме 3, p делит $|H|$, где H — подгруппа Картана в G. Рассмотрим подгруппу $O_p(H)$. Из определения $Z(p)$-группы ясно, что $O_p(H)$ централизует всякую силовскую 2-подгруппу в $N_G(H)$. Поэтому $[O_p(H), N_G(H)] = 1$. Группа $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$, где $H_i = \langle h_{\alpha_i}(t) \mid t \in GF(q)^* \rangle$, $\alpha_i \in \Pi$ — система простых корней и $k \geq 2$. Корни одинаковой длины сопряжены под действием группы Вейля. Следовательно, все корни множества Π имеют разную длину. Это возможно только в группах: ${}^3D_4(q)$, $G_2(q)$, $B_2(q)$. Если $G \cong {}^3D_4(q)$ или $G \cong G_2(q)$, то ее силовская 2-подгруппа самоцентрализуема [8]. Поэтому G не $Z(p)$-группа. Следовательно, $G \cong B_2(q)$. В этом случае силовская 2-подгруппа группы G также самоцентрализуема [9] и снова G не является $Z(p)$-группой.

Доказательство основных результатов

Теорема 1. *Пусть G — конечная $Z(p)$-группа и $S \leftthreetimes P$ — её холлова $\{2,p\}$-подгруппа, где $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $P \in \mathrm{Syl}_p(P)$. Если $C_P(S) \neq 1$, то группа G обладает главным рядом $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k = G$, где G_{i+1}/G_i — либо простая p-группа, либо простая p'-группа, либо простая неабелева $Z(p)$-группа и существует $0 \leq l < k$ такое, что $G_{l+1}/G_l \cong \mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример к теореме. Из леммы 7 следует, что группа G не является простой неабелевой группой. Рассмотрим главный композиционный ряд $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$. Если G_k/G_{k-1} является либо p-группой, либо p'-группой, то теорема доказана. Следовательно, G_k/G_{k-1} — простая неабелева группа и $p \mid |G_k/G_{k-1}|$. Пусть x — p-элемент группы G и $[x,S] = 1$. Если $x \notin G_{k-1}$, то G_k/G_{k-1} — $Z(p)$-группа и образ элемента x в G_k/G_{k-1} централизует силовскую 2-подгруппу в G_k/G_{k-1}. Согласно лемме 7 последнее невозможно. Таким образом, $x \in G_{k-1}$. Но тогда G_{k-1} удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому содержит нетривиальный фактор, изоморфный Z_p.

Теорема 2. *Пусть F — 2-замкнутая холлова π-подгруппа четного порядка D_π-группы G для некоторого $\pi \subseteq \pi(G)$ и S — ее силовская 2-подгруппа. Пусть $\pi_1 = \pi(C_F(S))\backslash\{2\} \neq \varnothing$. Тогда группа G обладает главным рядом $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k = G_r$, где G_{i+1}/G_i — либо простая r-группа, либо простая r'-группа, либо простая неабелева $Z(r)$-группа, где $r \in \pi_1$. Для любого $r \in \pi_1$ группа $\mathbb{Z}_r$ изоморфна некоторому G_{i+1}/G_i.*

Доказательство. Данная теорема доказывается аналогично теореме 1.

Доказательство следующего результата не опирается на теорему о классификации простых неабелевых групп.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа, содержащая 3-разложимую холлову подгруппу N четного порядка. Тогда G является 3-разрешимой группой.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка для которой теорема 3 не верна. Так как любая нормальная подгруппа и любая фактор-группа группы G удовлетворяют условиям теоремы 3, то ограничимся случаем, когда G — простая неабелева группа. Поскольку группа G содержит нильпотентную холлову $\{2,3\}$-подгруппу, то по теореме Виландта [2] она будет обладать свойством $D_{\{2,3\}}$. В частности это означает, что группа G является S^4-свободной.

Пусть сначала силовская 2-подгруппа в G неабелева. Из [10] заключаем, что $G \in \{Sz(q), q = 2^{2n+1} > 2; U_3(2^n), n \geq 2\}$. Группы Судзуки $Sz(q)$ являются единственным классом простых неабелевых групп, порядок которых не делится на 3, поэтому $G \cong U_3(2^n)$. Можно считать, что подгруппа N содержит унипотентную подгруппу U группы G. Из леммы 6 следует, что N содержится в некоторой собственной параболической подгруппе группы G. В группе $U_3(2^n)$ параболические подгруппы это в точности подгруппы Бореля. Следовательно, можно считать, что $N = U \leftthreetimes R$, где R — подгруппа, содержащаяся в подгруппе Картана группы G. Поскольку $O(N) \neq 1$, то $C_G(U) \not\subseteq U$. Противоречие с леммой 4.

Пусть силовская 2-подгруппа в G абелева. Из [11] следует, что $G \in \{L_2(2^n), n \geq 2; L_2(q), q \equiv \pm 3 \pmod 8; {}^2G_2(q), q = 3^{2n+1} > 3; J_1\}$. Если $G \cong L_2(2^n)$, то противоречие получается также как в случае $G \cong U_3(2^n)$. Пусть $G \cong L_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

По теореме Диксона (теорема 8.27 [7]) группа G имеет подгруппу A_4, что невозможно. Рассмотрим случай $G \cong {}^2G_2(q)$. Группа ${}^2G_2(q)$ содержит собственную подгруппу $A_1(q)$ [12], а поэтому содержит и подгруппу A_4, что невозможно. Пусть наконец $G \cong J_1$. Группа J_1 содержит подгруппу A_4 [13]. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Abstract. The author obtained an information about chief factors of a finite group with an 2-closed Hall subgroup. He also proved, without the classification of a somple groups, that a finite group with a 3-decomposable Hall subgroup of even order is 3-soluble. A group S is called 3-decomposable if $S = S_3 \times S_{3'}$, where S is a Sylow 3-subgroup of S.

Литература

[1] Л.С.Казарин, *Автоморфизмы, факторизации и теоремы типа Силова,* Матем. сборник 120:2 (1983), 190–199.

[2] H.Wielandt, *Zum Satz von Sylow,* Math. Z. 60 (1954), 407–409.

[3] Д.Горенстейн, *Конечные простые группы, Введение в их классификацию.* М., 1975.

[4] Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп,* М., 1978.

[5] С.А.Сыскин, *Абстрактные свойства простых спорадических групп,* УМН. 35:5 (1980), 181–212.

[6] P.Hall, *Theorems like Sylow's,* Proc. London Math. Soc. 6:11 (1956), 286–304.

[7] B.Huppert, *Endliche Gruppen* I. Berlin–Heidelberg–New York, 1967.

[8] G.Glauberman, K.Harada, *Finite simple groups of low 2-rank and the families $G_2(4)$, $D_4^2(q)$, q odd,* Bull. Amer. Math. Soc, 77:6 (1971), 829–862.

[9] G.M.Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type,* J. Algebra, 61 (1979), 16–27.

[10] G.Glauberman, *Factorizations in local subgroups of finite groups,* Reg. Conf. Ser. Math. № 33 (1977). (Amer. Math. Soc. Providence. 1977).

[11] J.H.Walter, *The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups,* Ann. Math. 89 (1969), 405–514.

[12] P.Kleidman, *The maximal subgroups of Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups,* J. Algebra 117 (1988), 30–71.

[13] Y.H.Conway, R.T.Curtis, S.P.Norton, R.A.Parker, R.A.Wilson, *Atlas of finite groups,* Oxford, 1985.

Гомельский госуниверситет
им. Франциска Скорины
246019 Гомель, Беларусь

Поступило 29.04.2000