Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 1(16), 2003

УДК 512.542

Характеризация конечных p-сверхразрешимых групп

Е.А.Молокова

Конечная группа называется p-сверхразрешимой (p — простое число), если порядок каждого ее главного фактора или равен p, или не делится на p. Цель настоящей работы — дать характеризацию конечных p-сверхразрешимых групп, используя следующее определение.

Определение (предложено Л.А.Шеметковым). *Элемент $x \in G$ назовем $\mathfrak{U}Q$-центральным, если существует такой циклический главный фактор H/K группы G, что $x \in H \backslash K$.*

В работе рассматриваются лишь конечные группы. Используемые далее определения и обозначения стандартны, их можно найти в [1].

Теорема. *Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G. Тогда G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждый элемент из $P\backslash\Phi(P)$ $\mathfrak{U}Q$-централен в G.*

Доказательство. Пусть G p-сверхразрешима. Очевидно, любой p-элемент группы G $\mathfrak{U}Q$-централен в G, а значит, и любой элемент из $P\backslash\Phi(p)$ $\mathfrak{U}Q$-централен в G. Обратно, пусть каждый элемент из $P\backslash\Phi(P)$ $\mathfrak{U}Q$-централен в G. Докажем, что G p-сверхразрешима. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда существуют группы, для которых оно не выполняется. Выберем среди всех таких групп группу G наименьшего порядка. Положим $R = O_{p'}(G)$. Рассмотрим изоморфное отображение $\varphi : P \to PR/R$. Очевидно, $(P\backslash\Phi(P))^{\varphi} = (PR/R)\backslash\Phi(PR/R)$. Возьмем элемент $y \in P\backslash\Phi(P)$. Согласно условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой что $y \in S\backslash L$. Очевидно, что $SR/LR \cong S/S \cap LR = S/L(S \cap R)$. Так как S/L — главный фактор, то $L(S \cap R)$ совпадает либо с S, либо с L. Пусть $L(S \cap R) = S$. Так как $S \cap R$ — p'-подгруппа, то все p-элементы из $L(S \cap R)$ содержится в L. Следовательно, из $L(S \cap R) = S$ следует, что $y \in L$. Получаем противоречие. Итак, $L(S \cap R) = L$. Отсюда следует, что SR/LR изоморфна S/L. Тогда очевидно, что $y \in SR\backslash LR$. Итак, если $R \neq 1$, то по предположению, G/R p-нильпотентна. Но тогда G также p-нильпотентна. Таким образом, будем считать, что $R = O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-сверхразрешимых групп. Рассмотрим $\mathfrak{F}$-корадикал T группы G. По теореме Гашюца (см.[1],теорема 4.2; [2], Theorem III.3.5), T не содержится в $\Phi(G)$. Пусть $K/T \cap \Phi(G)$ — главный фактор группы G, такой что $K/T \cap \Phi(G) \subseteq T/T \cap \Phi(G)$. Ясно, что p делит порядок $K/T \cap \Phi(G)$. Тогда по следствию 8.12 из ([1], с. 91), $K/T \cap \Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный нефраттиниев главный фактор группы G. В дальнейшем будем считать, что K — нормальная подгруппа группы G наименьшего порядка, удовлетворяющая следующим условиям: $K \subseteq T$ и $K/K \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G. Введем обозначение: $\Phi = K \cap \Phi(G)$. По теореме A.9.13 из [3], каждый G-главный ряд группы K имеет только один нефраттиниев главный фактор, и все нефраттиниевы G-главные факторы группы K G-изоморфны. Пусть D/Φ — минимальное добавление к K/Φ в G/Φ. Очевидно, можно считать, что P содержит некоторую силовскую p-подгруппу D_p группы D. Значит, $P = D_pK_p$, где K_p — силовская p-подгруппа из K. По теореме 12.4 из [1], D_p/Φ не содержит K_p/Φ. Следовательно, существует такой элемент $x \in P$, что $x\Phi \in (K_p/\Phi)\backslash\Phi(P/\Phi)$. Поскольку

$\Phi(P)\Phi/\Phi$ содержится в $\Phi(P/\Phi)$, то $x \notin \Phi(P)$ и $x \notin \Phi$. По условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой что $x \in S \backslash L$. Очевидно, что SK/LK G-изоморфна группе $S/L(S \cap K)$, и $L(S \cap K)$ совпадает либо с L, либо с S.

Так как $x \in (S \cap K) \backslash L$, то получаем $S = L(S \cap K)$. Итак, S/L G-изоморфна $S \cap K/L \cap \cap K$. Более того, $x \in S \cap K$ и $x \notin L \cap K$. Если фактор $S \cap K/L \cap K$ нефраттиниев, то он G-изоморфен K/Φ, и мы получаем противоречие. Итак, $S \cap K/L \cap K$ — фраттиниев главный фактор. Используя теорему A.9.13 из [3], опять приходим к противоречию. Итак, $L \cap K \subseteq \Phi$. Поскольку фактор $S \cap K/L \cap K$ фраттиниев, то мы получаем следующее: $S \cap K \subseteq \Phi$. Но это противоречит тому, что x принадлежит $S \cap K$, но не принадлежит Φ. Теорема доказана.

Abstract

By L.A.Shemetkov, an element x of a finite group G is called $\mathfrak{U}Q$-central if there exists a cyclic chief factor H/K of G such that $x \in H \backslash K$. It is proved that a finite group G with a Sylow p-subgroup P is p-supersoluble iff every element in $P \backslash \Phi(P)$ is $\mathfrak{U}Q$-central in G.

Литература

1. Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

2. B.Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1967.

3. K.Doerk, T.Hawkes, Finite soluble groups, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

Гомельский технический
университет им. П.О.Сухого

Поступило 5.11.2002