Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

О τ-замкнутых ω-локальных формациях

И.М.Близнец

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Мы используем стандартную терминологию [1–3]. Кроме того, нам будут необходимы некоторые определения и обозначения из работы Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы [4] и понятие подгруппового функтора, введенное А.Н.Скибой в монографии [5].

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место
$$H^{\varphi} \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

В дальнейшем τ обозначает некоторый подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой [5], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Символом $\tau\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех таких τ-замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

В дальнейшем ω обозначает некоторое множество простых чисел. Согласно [4] всякая функция вида
$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$
называется ω-локальным спутником. Спутник f называется τ-значным, если все значения f принадлежат τ. Пусть $G_{\omega d}$ означает наибольшую нормальную подгруппу N в G такую, что $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G) = \varnothing)$.

Для произвольного спутника f символ $LF_{\omega}(f)$ обозначает [4] класс
$$\{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, то говорят, что она ω-локальна и f — ω-локальный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется внутренним спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — простое число, тогда, следуя [4], мы полагаем
$$\mathfrak{X}_{\tau}(F_p) = \begin{cases} \tau\,\mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}), \end{cases}$$
в частности,
$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

Согласно [4] спутник F формации $\mathfrak{F}$ называется каноническим, если $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$.

В настоящей работе изучаются формации, имеющие внутренний τ-значный ω-локальный спутник.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний τ-значный ω-локальный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация;*

2) *если $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация, то ее канонический ω-локальный спутник является τ-значным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f — внутренний ω-локальный спутник, все значения которого τ-замкнуты. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Допустим противное. Тогда найдутся такие группа $G \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством. Пусть R — минимальная нормальная в G подгруппа. Покажем, что R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Предположим противное. Пусть R и L — две различные минимальные нормальные в G подгруппы. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R \in \mathfrak{F}$. А так как $|G/R| < |G|$, то по выбору группы G для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/R)$ следует, что $\overline{H} \in \mathfrak{F}$. Заметим, что при каноническом эпиморфизме $\varphi : G \to G/R$ мы имеем $\varphi(H) = HR/R$. Значит, $HR/R \in \tau(G/R)$. Следовательно

$$H/R \cap H \simeq HR/R \in \mathfrak{F}.$$

Аналогично,

$$H/L \cap H \simeq HL/L \in \mathfrak{F}.$$

Но так как $(R \cap H) \cap (L \cap H) = 1$, то

$$H \simeq H/1 = H/(R \cap H) \cap (L \cap H) \in \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору групп G и H. Значит R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что R — ω'-группа. Тогда $G_{\omega d} = 1$ и поэтому

$$G \simeq G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$$

Следовательно, поскольку $H \in \tau(G)$ и формация $f(\omega')$ по условию τ-замкнута, то $H \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие. Значит R — ωd-группа. Пусть R — неабелева группа и пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $F_p(G) = 1$ и поэтому

$$G \simeq G/1 = G/F_p(G) \in f(p).$$

Но так как $H \in \tau(G)$, то $H \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, противоречие. Следовательно, R — абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Так как $R \cap H \lhd H$ и $R \cap H$ — p-группа, то $R \cap H \subseteq O_p(H) \subseteq H_{\omega d}$. По лемме 1 [4]

$$(H/R \cap H)_{\omega d} = H_{\omega d}/R \cap H.$$

Но $H/R \cap H \in \mathfrak{F}$ и, следовательно,

$$(H/R \cap H)/(H/R \cap H)_{\omega d} \in f(\omega').$$

Значит,

$$(H/R\cap H)/(H/R\cap H)_{\omega d} = (H/R\cap H)/(H_{\omega d}/R\cap H) \simeq H/H_{\omega d} \in f(\omega').$$

Пусть теперь $q \in \pi(H)\cap\omega$. Тогда, поскольку $HF_q(G)/F_q(G) \in \tau(G/F_q(G))$ и $G/F_q(G) \in f(p)$, то

$$HF_q(G)/F_q(G) \simeq H/F_q(G)\cap H \in f(p).$$

Следовательно, поскольку, очевидно, $F_q(G)\cap H \subseteq F_q(H)$ и $H/F_q(G)\cap H \in f(p)$, то $H/F_q(H) \in f(p)$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$, что противоречит нашему выбору групп G и H. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ — τ-замкнута.

Для доказательства утверждения 2) сначала докажем, что если некоторая формация $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также τ-замкнута.

Действительно, так как $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$ и формация $\mathfrak{H}$ по предположению τ-замкнута, то для любой группы $\overline{H} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$ следует, что $\overline{H} \in \mathfrak{H}$. Но $G^{\mathfrak{H}}H/G^{\mathfrak{H}} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$G^{\mathfrak{H}}H/G^{\mathfrak{H}} \simeq H/H\cap G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}.$$

Но $H\cap G^{\mathfrak{H}} \lhd H$ и $H\cap G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Значит, $H\cap G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$ и поэтому $H^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$, т.е. $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $H \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$.

Пусть $p\in\omega$ и F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $F(p)$ τ-замкнута.

Пусть группа $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Пусть P — неединичная p-группа и $D = P \wr G = [K]G$, где K — база регулярного сплетения D. Тогда $HK \in \tau(D)$. Действительно, пусть $\varphi : D \to D/K$ — канонический эпиморфизм группы D на D/K. Тогда $HK/K = H^{\varphi}$ и поэтому $HK/K \in \tau(D/K)$. А так как $HK = (HK/K)^{\varphi^{-1}}$ — полный прообраз подгрупп HK/K при эпиморфизме φ, то $HK \in \tau(D)$.

Поскольку спутник F является внутренним и $G \in F(p)$, то по лемме 4 [4] $D \in \mathfrak{F}$. Значит, $HK \in \mathfrak{F}$. Пусть $M = HK$. Тогда $M/F_p(M) \in F(p)$. Поскольку K — нормальная в M p-группа, то $K\cap O_{p'}(M) = 1$, а значит $O_{p'}(M) \subseteq C_M(K)$. По свойству регулярных сплетений $C_G(K) \subseteq K$. Следовательно, $O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_p(M) = F_p(M)$.

Так как $O_p(M) = O_p(M)\cap M = O_p(M)\cap KH = K(O_p(M)\cap H)$, и поскольку $O_p(M)\cap H \subseteq O_p(H)$, то $O_p(M) = K(O_p(M)\cap H) \subseteq KO_p(H) \subseteq O_p(M)$.

Значит, $KO_p(H) = O_p(M)$. Тогда

$$M/F_p(M) = KH/O_p(M) = KH/KO_p(H) \simeq H/O_p(H)(K\cap H) =$$

$$= H/O_p(H) \in F(p) = \mathfrak{N}_pF(p),$$

т.е.

$$H \in (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p)F(p) = \mathfrak{N}_pF(p) = F(p).$$

Значит, формация $F(p)$ τ-замкнута. Теорема доказана.

□

Для произвольного непустого класса групп $\mathfrak{X}$ символом $\mathfrak{X}_\tau(\omega d)$ обозначим формацию $\tau\,\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$. В частности, $\mathfrak{X}(\omega d) = \mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$.

Теорема 2. *Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда τ-замкнута и ω-локальна, когда*

$$\mathfrak{F}_\tau(\omega d) \subseteq \mathfrak{F}$$

и

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F} \text{ для всех } p \in \omega.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая ω-локальная формация, F — ее канонический ω-локальный спутник. Докажем, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 1 формация $F(p)$ τ-замкнута. Значит, поскольку $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq F(p)$,то

$$\mathfrak{F}_\tau(F_p) = \tau\,\mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq F(p).$$

Но $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) = F(p)$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{N}_pF(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Значит, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_\tau(\omega d) \subseteq \mathfrak{F}$ и для любого $p \in \omega$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть f — такой ω-локальный спутник, что $f(\omega') = \mathfrak{F}_\tau(\omega d)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p)$. Пусть $\mathfrak{M} = LF_\omega(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $p \in \pi(R) \cap \omega$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Но $G \in LF_\omega(f)$. Значит,

$$G \simeq G/1 = G/F_p(G) \in f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, R — p-группа. Поэтому $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$. Значит, так как $G \in LF_\omega(f)$, то $G/R \in f(p)$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{N}_pf(p) = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p)) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R — ω'-группа. Тогда $G_{\omega d} = 1$ и

$$G \simeq G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}_\tau(\omega d) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} = LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = LF_\omega(f)$. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{M} = LF_\omega(f)$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то

$$G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}_\tau(\omega d) = f(\omega')$$

и

$$G/F_p(G) \in \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}_\tau(F_p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\tau(F_p) = f(p)$$

для произвольного $p \in \pi(G) \cap \omega$. Значит, $G \in \mathfrak{M} = LF_\omega(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = LF_\omega(f)$. Поэтому, $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$.

Значит, по теореме 1, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая ω-локальная формация. Теорема доказана. □

Отметим, что в случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор [5] (т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для всех групп G), из теоремы 2 вытекает следующий известный результат:

Следствие 1 (А.Н.Скиба, Л.А.Шеметков [4, Теорема 1]). *Формация $\mathfrak{F}$ ω-локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.*

Следуя [5], мы обозначаем через s и s_n соответственно такие подгрупповые функторы, что для любой группы G $s(G)$ — множество всех подгрупп в G, а $s_n(G)$ — множество всех нормальных подгрупп в G.

Следствие 2. *Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда s-замкнута и ω-локальна, когда*

$$\mathfrak{F}_s(\omega d) \subseteq \mathfrak{F}$$

и

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_s(F_p) \subseteq \mathfrak{F} \text{ для всех } p \in \omega.$$

Следствие 3. *Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда s_n-замкнута и ω-локальна, когда*

$$\mathfrak{F}_{s_n}(\omega d) \subseteq \mathfrak{F}$$

и

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_{s_n}(F_p) \subseteq \mathfrak{F} \text{ для всех } p \in \omega.$$

Напомним, что если $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то ω-локальные формации называются просто локальными формациями.

Заметим, что в этом случае

$$\mathfrak{F}_\tau(\omega d) = \tau \operatorname{form}(G/G | G \in \mathfrak{F}) = (1).$$

Поэтому из теоремы 2 имеем

Следствие 4 (А.Н.Скиба, [5, теорема 1.3.7, с. 29]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и F — ее канонический локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута в том и только в том случае, когда $F(p)$ — τ-замкнутая формация для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 5 (Л.М.Слепова [6], В.Д.Подуфалова [7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и F — ее канонический локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}$ s-замкнута в том и только в том случае, когда $F(p)$ — s-замкнутая формация для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Следствие 6 (Л.М.Слепова [6], В.Д.Подуфалова [7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и F — ее канонический локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}$ s_n-замкнута в том и только в том случае, когда $F(p)$ — s_n-замкнутая формация для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Abstract. We study ω-local formations having τ-valued ω-local satellite where τ is an arbitrary subgroup functor (in sense of Skiba)

Литература

[1] Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

[2] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, Формации алгебраических систем, М.: Наука, 1989.

[3] K.Doerk, D. Hawkes, Finite Soluble Groups, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992

[4] А.Н.Скиба, Л.А.Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп, Матем. труды, **2** (1999), С. 114–147.

[5] А.Н.Скиба, Алгебра формаций, Мн.: Беларуская навука, 1997

[6] Л.М.Слепова, О замкнутых локальных формациях групп, 14-ая Всесоюзная алгебраическая конференция (Новосибирск, сентябрь 1977 г.), тезисы докладов, Ч. I, Новосибирск, 1977, С. 62–63.

[7] В.Д.Подуфалова, О замкнутости локальных формаций относительно (нормальных) подгрупп, Сибирский математический журнал, 19:1 (1978), С. 230–231.

Белорусский государственный
университет транспорта
E-mail: irina_bliznets@tut.by

Поступило 17.04.2002