Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20D20

О перестановочности подгрупп в конечных группах

Л.М.Белоконь

Пусть π — некоторое множество простых чисел, U и V — подгруппы конечной группы G с холловской π-подгруппой G_π, перестановочной с U и V. В работе [1] найдены достаточные условия перестановочности G_π с $U \cap V$ для случая, когда G — разрешимая группа, и приведены примеры, указывающие на существенность этих условий.

В настоящей заметке доказывается перестановочность G_π и $U \cap V$ для необязательно разрешимых групп при ослабленных других условиях. Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и основные определения см. в [2].

Лемма 1. *Пусть $G = AC = BC$, где A, B и C — подгруппы группы G, индексы A и B в G взаимно просты. Если K — субнормальная подгруппа C, то $K = (K \cap A)(K \cap B)$; в частности, $C = (C \cap A)(C \cap B)$.*

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию леммы, и $q \in \pi(K)$. Так как индексы подгрупп A и B в G взаимно просты, то q не может быть их общим делителем; пусть, для определённости, $|G : A|$ не делится на q. Так как $G = AC$, то $|G : A| = |C : A \cap C|$. Значит, $G_q = (A \cap C)_q$ для некоторых S_q-подгрупп C_q из C и $(A \cap C)_q$ из $A \cap C$. Пусть

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n = C$$

субнормальная $(C - K)$-цепь. Так как $K_{i-1} \lhd K_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то по теореме Силова для некоторых элементов $a_i \in K_i$ и силовских q-подгрупп K_q, $(K_i)_q$ в K и K_i соответственно, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$K_q^{a_1} \subseteq (K_1)_q^{a_2} \subseteq (K_2)_q^{a_3} \subseteq \ldots \subseteq (K_{n-1})_q^{a_n} \subseteq (K_n)_q = C_q = (A \cap C)_q.$$

Итак, для любого $q \in \pi(K)$, не делящего $|G : A|$, хотя бы одна из S_q-подгрупп K содержится в $A \cap C$. Если для любого $r \in \pi(K)$ индекс $|G : A|$ взаимно прост с r то $K \subseteq A \cap C \subseteq A$, и, значит, $K = K \cap A$. Пусть G : A делится на p для некоторого $p \in \pi(K)$. Тогда p не делит $|G : B|$, и, следовательно, хотя бы одна из S_p-подгрупп K содержится в $B \cap C$, так как $G = BC$. Таким образом, $\pi(K) = \tau \cup \sigma$, $\tau \cap \sigma \neq \varnothing$, где τ — множество всех простых делителей $|K|$, взаимно простых с $|G : A|$, σ — множество всех простых делителей $|K|$, делящих $|G : A|$. Следовательно, $|K| = |K|_\tau |K|_\sigma$, а также $|K|_\tau = |K \cap (A \cap C)|_\tau = |K \cap A|_\tau$ и $|K|_\sigma = |K \cap (B \cap C)|_\sigma = |K \cap B|_\sigma$, так как $K \subseteq C$. Индексы подгрупп $K \cap A$ и $K \cap B$ в K взаимно просты, поэтому $K = (K \cap A)(K \cap B)$. Лемма доказана. □

Следствие 1 ([3]). *Пусть A и B — подгруппы взаимно простых индексов в группе G, K — субнормальная подгруппа G. Тогда $K = (K \cap A)(K \cap B)$.*

Доказательство. Положим в лемме 1 $C = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Следуя [4], подгруппу H группы G будем называть $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если в G существует такая цепь подгрупп $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = H$, что либо $G_i \lhd G_{i-1}$, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}} \in \mathfrak{F}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. □

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой S-замкнутый гомоморф, и пусть G, H и K — подгруппы группы D, причем $H \subseteq G$ и $G/H_G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \cap K/(H \cap K)_{G \cap K} \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $H_G \cap K \lhd G \cap K$, то $H_G \cap K \subseteq (H \cap K)_{G\cap K}$. Учитывая $(G \cap K)/(H_G \cap K) \approx (G \cap K)H_G/H_G \subseteq G/H_G \in \mathfrak{F}$, получаем $G \cap K/(H \cap K)_{G\cap K} \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана. □

Легко видеть, что для непустого S-замкнутого гомоморфа $\mathfrak{F}$ из леммы 2 вытекает утверждение: если подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в группе G, K — подгруппа G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой гомоморф, и пусть H и N — подгруппы группы G, $N \lhd G$. Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что если в цепи подгрупп $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = H$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ факторгруппа $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}} \in \mathfrak{F}$, то в цепи $G/N = G_0/N \supseteq G_1N/N \supseteq \ldots \supseteq G_tN/N = HN/N$ факторгруппа $A = G_{i-1}N/N/(G_iN/N)_{G_{i-1}N/N} \in \mathfrak{F}$. Действительно, A $\approx G_{i-1}N/R$, где R — наибольшая нормальная в $G_{i-1}N$ подгруппа из G_iN, содержащая N; и так как $(G_i)_{G_{i-1}}N \subseteq R$, а $G_{i-1}N/(G_i)_{G_{i-1}}N \approx G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}}(N \cap G_{i-1}) \in \mathfrak{F}$, то $A \approx G_{i-1}N/R \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, и пусть U — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $|G|_{\pi'} = |U|_{\pi'}$, то U содержит все S_q-подгруппы G для любого $q \in \pi' \cap \pi(G)$;*

2) *если U — π'-группа, то U субнормальна в G.*

Доказательство. Будем доказывать лемму методом индукции по длине цепи подгрупп $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = U$, в которой либо $G_i \lhd G_{i-1}$, либо $G_{i-1}/(G_i)_{G_{i-1}} \in \mathfrak{F}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Оба утверждения леммы справедливы при $t = 1$. Пусть $G_1 \subset G$, и предположим, без потери общности, что утверждение 1) и утверждение 2) верны для G_1.

Если $|G|_{\pi'} = |U|_{\pi'}$, то $|G|_q = |U|_q = |G_1|_q$ для любого $q \in \pi(G) \cap \pi'$; и в случае $G_1 \lhd G$ с учетом теоремы Силова получаем, что G_1 содержит все S_q-подгруппы группы G, а если $G/(G_1)_G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_\pi$, то все S_q-подгруппы G содержатся в $(G_1)_G$, а значит, и в G_1. В силу предположения индукции U содержит все S_q-подгруппы группы G_1, поэтому U содержит все S_q-подгруппы G.

Пусть U — π'-группа, по предположению индукции $U \lhd\lhd G_1$. Если $G_1 \lhd G$, то $U \lhd\lhd G$, а если $G/(G_1)_G \in \mathfrak{F}$, то U, порождаемая своими силовскими подгруппами, содержится в $(G_1)_G$, и по теореме 7.3 [2] $U \lhd\lhd G_1$, откуда $U \lhd\lhd G$. Лемма доказана. □

Определение 1 ([1]). Пусть π — некоторое множество простых чисел. Подгруппу U группы G называют π-нормально погруженной в G, если U обладает холловской π-подгруппой, являющейся холловской π-подгруппой некоторой нормальной подгруппы G.

Лемма 5. *Пусть U — подгруппа группы $G \in E_\pi$, G_π — холловская π-подгруппа G, перестановочная с U. Если U π-нормально погружена в G, то $U \cap G_\pi \lhd G_\pi$.*

Доказательство. Так как $UG_\pi = G_\pi U$, то $U \cap G_\pi$ — холловская π-подгруппа U. Пусть U_π — холловская подгруппа группы U и нормальной в G подгруппы T. Так как $T \lhd G$, то T содержит каждую S_p-подгруппу из $U \cap G_\pi$, сопряженную в U с некоторой S_p-подгруппой из U_π, $p \in \pi$; поэтому $U \cap G_\pi \subseteq T$. Далее, $U \cap G_\pi \subseteq T \cap G_\pi$, $T \cap G_\pi$ — холловская подгруппа T. Следовательно, $U \cap G_\pi = T \cap G_\pi \lhd G_\pi$. Лемма доказана. □

Теорема. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, и пусть G_π — холловская π-подгруппа G, перестановочная с U и V. Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:*

1) *U $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U$ или V $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi V$;*

2) *$UV = VU$;*

3) *$U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U$ или в $G_\pi V$, $U \cap G_\pi \lhd G_\pi$ или $V \cap G_\pi \lhd G_\pi$. Тогда G_π перестановочна с $U \cap V$.*

Доказательство. Будем доказывать три утверждения одновременно. Предположим, теорема неверна, и пусть G — группа наименьшего порядка с S_π-подгруппой G_π, перестановочной с подгруппами U и V, в отношении которых выполнено условие 1) (условие 2) или условие 3)), но G_π не перестановочна с $U \cap V$. Так как утверждение теоремы справедливо в случае G — π-группа, то $|G|$ делится на простые из π.

Допустим, что $G_\pi U \subset G$. В группе $G_\pi U$ подгруппы U и $\overline{V} = G_\pi U \cap V$ перестановочны с G_π, так как $G_\pi \overline{V} = G_\pi(G_\pi U \cap V) = G_\pi U \cap G_\pi V$ — группа. Пусть выполнено условие 1) для G. Условие U G_π-субнормальна в $G_\pi U$ наследуется для $G_\pi U$, а если V $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi V$, то $\overline{V} = G_\pi U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U \cap G_\pi V = G_\pi \overline{V}$ по лемме 2. Предположим, что G удовлетворяет условию 2): $UV = VU$; тогда U перестановочна с $\overline{V}$, так как $U(G_\pi U \cap V) = G_\pi U \cap VU$ — группа. Пусть выполнено условие 3): $U \cap G_\pi \lhd G_\pi$ или $V \cap G_\pi \lhd G_\pi$ и $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U$ или $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi V$. Тогда, если $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U$, то $U \cap \overline{V} = U \cap (G_\pi U \cap V) = U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi U$. А если $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi V$, то $U \cap \overline{V} = U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в $G_\pi(G_\pi U \cap V) = G_\pi \cap \overline{V}$ по лемме 2. Из $V \cap G_\pi \lhd G_\pi$ следует $\overline{V} \cap G_\pi = (G_\pi U \cap V) \cap G_\pi \lhd G_\pi$. Так как $|G_\pi U| < |G|$, то G_π перестановочна с $U \cap \overline{V} = U \cap V$. Противоречие. Значит, $G_\pi U = G$.

Аналогичным образом устанавливаем, что $G_\pi V = G$. Из $G = G_\pi U = G_\pi V$ следует, что $|G|_{\pi'} = |U|_{\pi'} = |V|_{\pi'}$. Если U (или V) $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в G, то по лемме 4 U (V соответственно) содержит все S_q-подгруппы G для любого $q \in \pi' \cap \pi(G)$, а значит, и все S_q-подгруппы V (U соответственно). Следовательно, $U = (U \cap G_\pi)(U \cap V)$ ввиду взаимно просты индексов подгрупп $U \cap G_\pi$ и $U \cap V$ в группе U. В этом случае $G = G_\pi U = G_\pi(U \cap G_\pi)(U \cap V) = G_\pi(U \cap V)$ — противоречие. Если $UV = VU$, то $|G|_{\pi'} = |U \cap V|_{\pi'}$, так как $|UV|_{\pi'} = \frac{|U|_{\pi'}|V|_{\pi'}}{|U \cap V|_{\pi'}}$. Значит, индексы подгрупп G_π и $U \cap V$ в G взаимно просты. Поэтому $G = G_\pi(U \cap V)$ — противоречие. Пусть, наконец, G удовлетворяет условию 3), причем $G_\pi \cap U \lhd G_\pi$. Предположим, что $G_\pi \cap U = 1$. Тогда U — π'-группа, а так как $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в G, то по лемме 4 $U \cap V \lhd \lhd G$, а по теореме 7.7 [2] $U \cap V \subseteq O_{\pi'}(G)$. Так как в случае $U \cap V = 1$ группа G_π, конечно, перестановочна с $U \cap V$, то $O_{\pi'}(G) \neq 1$. Ввиду того, что $|G|_{pi'} = |U| = |UO_{pi'}(G)|$, получаем $O_{pi'}(G) \subseteq U$. Пусть $G_\pi \cap U \neq 1$. Тогда $(G_\pi \cap U)^G = (G_\pi \cap U)^{G_\pi U} \subseteq U$. Итак, в любом случае U содержит нормальную в G подгруппу $N \neq 1$. Так как индексы подгрупп G_π и V в $G = G_\pi V$ взаимно просты, то по следствию леммы 1 $N = N_\pi L$, где $N_\pi = G_\pi \cap N$, $L = V \cap N$. Группа G/N удовлетворяет условию 3) в отношении подгрупп U/N и VN/N и холловской π-подгруппы $G_\pi N/N$. Действительно, $U/N \cap VN/N = U \cap VN/N = (U \cap V)N/N$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в G/N по лемме 3, U/N и VN/N перестановочны с $G_\pi N/N$; $U/N \cap G_\pi N/N = N(U \cap G_\pi)/N \lhd G_\pi N/N$. Так как $|G/N| < |G|$, то $G_\pi N/N$ перестановочна с $U/N \cap VN/N = (U \cap V)N/N$, откуда следует перестановочность $G_\pi N$ и $(U \cap V)N$, т.е. $G_\pi NN(U \cap V) = G_\pi(N_\pi L)(U \cap V) = (G_\pi N\pi)(L(U \cap V)) = G_\pi(U \cap V)$ — группа. К такому же результату приходим, предположив $V \cap G_\pi \lhd G_\pi$. Противоречие. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, G_π — холловская π-подгруппа G. Если U (или V) $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в G, G_π перестановочна с подгруппами U и V, то G_π перестановочна с подгруппой $U \cap V$.*

Следствие 1 обобщает теорему А из [1].

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, обладающий решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Тогда в любой группе $G \in E_\pi$ множество всех $\mathfrak{F} \cap \cap \mathfrak{G}_\pi$-субнормальных подгрупп, перестановочных с холловской π-подгруппой G_π группы G, образует решетку.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, если в любой группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку [4].

Следствие 3. *В любой группе $G \in E_\pi$ множество всех субнормальных подгрупп, перестановочных с холловской π-подгруппой G_π, образует решетку.*

Для случая G — π-разрешимая группа утверждения следствий 1–3 содержатся в [4].

Следствие 4. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, G_π — холловская π-подгруппа G. Если $U \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$ (или $V \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$), $U \cap V$ $\mathfrak{G}_\pi$-субнормальна в G, а G_π перестановочна с U и V, то G_π перестановочна с $U \cap V$.*

Следствие 5. *Пусть U и V — подгруппы группы $G \in E_\pi$, G_π — холловская π-подгруппа G. Если $U \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$ (или $V \cap G_\pi \triangleleft G_\pi$), $U \cap V$ субнормальна в G, а G_π перестановочна с U и V, то G_π перестановочна с $U \cap V$.*

Ввиду леммы 5 следствие 5 обобщает теорему С из [1].

Из доказанной теоремы вытекает также теорема В из [1] и теорема из [5].

Abstract. Let G be a finite group with a Hall π-subgroup G_π, U and V — subgroups of G. In the note there is obtained a new information concerning sufficient conditions to ensure that G_π permutes with $U \cap V$ provided that G_π permutes with U and V.

Литература

[1] Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos, Permutability in finite soluble groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 115 (1993), 393–396.

[2] Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

[3] В.С.Монахов, О произведении двух разрешимых групп с максимальным пересечением факторов, Вопросы алгебры, 1 (1985), 54–57.

[4] С.Ф. Каморников, Л.Я. Поляков, О решетках подгрупп в конечных π-разрешимых группах // Проблемы алгебры и кибернетики (Материалы международной конференции, посвященной памяти академика С.А. Чунихина), ч.1, Гомель, 1995, 72–73.

[5] Л.Я. Поляков, О решетках подгрупп в конечной группе, Материалы VII Белорусской математической конференции (Минск, 18–22 ноября 1996), Минск, 1996, 74–75.

Могилёвский государственный
университет продовольствия

Поступило 25.04.2002