Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20N15

Одно замечание о перестановочных подгруппах n-арных групп

А.Ф.Аль-Дабабсех

Напомним [1, 2], что система $\langle G, (\ )\rangle$ с одной арной операцией $(\ )$ называется n-арной группой, если эта операция ассоциативна и в G разрешимо каждое из уравнений

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n) = b,$$

где i пробегает $1, 2, \ldots, n$. Все рассматриваемые нами n-арные группы конечны.

Подгруппа H группы G называется перестановочной, если $HT = TH$ для всех подгрупп T группы G. Хорошо известно, что любая перестановочная подгруппа является субнормальной (см.[3], а также теорему 5.1.1 книги [4]). Целью данной работы является доказательство аналогичного результата для n-арных групп.

Мы будем использовать терминологию, принятую в книге С.А.Русакова [2]. В частности, мы применяем символ x_m^k для обозначения последовательности $x_m x_{m+1} \ldots x_k$ (по определению $x_m^m = x_m$). Пусть G — n-арная группа. Последовательность ее элементов $x_1^{k(n-1)}$ называется нейтральной, если $(x x_1^{k(n-1)}) = (x_1^{k(n-1)} x) = x$ для всех $x \in G$. Пусть $x \in G$. Последовательность $\overline{x}$ элементов из G называется обратной для x, если $x\overline{x}$ — нейтральная последовательность. Если $H \subseteq G$ и x_1^i и y_1^j — последовательности элементов из G, где $i+j = k(n-1)$ $(k \in \mathbf{N})$, то символ $[x_1^i H y_1^j]$ обозначает набор всех элементов вида $(x_1^i h y_1^j)$, где $h \in H$.

По аналогии с бинарным случаем подгруппу H n-арной группы G назовем нормальной в G, если для любого элемента $x \in G$ и для любой обратной для x последовательности $\overline{x}$ имеет место

$$xH\overline{x} = H.$$

Подгруппу H n-арной группы G назовем субнормальной в G, если в G найдется такая цепь подгрупп

$$H = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_{t-1} \subseteq N_t = G,$$

где N_i — нормальная в N_{i+1} подгруппа, $i = 0, 1, \ldots, t-1$.

Если H и T подгруппы n-арной группы G, то символом $[\overset{i}{H}\overset{n-i}{T}]$ обозначается множество всех произведений вида $(h_1 \ldots h_i t_1 \ldots t_{n-i})$, где $h_j \in H$ и $t_j \in T$.

Лемма 1 (см. теорему 2.4 на с.107 [2]). *Пусть H и T — такие подгруппы n-арной группы G, что*

$$[H\overset{n-1}{T}] = [\overset{n-1}{T}H].$$

Тогда $B = [H\overset{n-1}{T}]$ является подгруппой G и $B \supseteq H$.

Подгруппу H n-арной группы G назовем перестановочной, если для любой другой подгруппы T из G имеет место $T \cap H \neq 0$ и

$$[H\overset{n-1}{T}] = [\overset{n-1}{T}H].$$

Лемма 2. *Если H и T — перестановочные подгруппы n-арной группы G, то $[H\overset{n-1}{T}]$ — перестановочная подгруппа G.*

Доказательство. Пусть D — произвольная подгруппа n-арной группы G. Тогда согласно определению перестановочной подгруппы, $H \cap D \neq \varnothing$. Но согласно лемме 1, $H \subseteq [H\overset{n-1}{T}]$. Значит,

$$H \cap D \subseteq [H\overset{n-1}{T}] \cap D \neq \varnothing.$$

Заметим теперь, что

$$[[H\overset{n-1}{T}]\overset{n-1}{D}] = [H\overset{n-2}{T}T\overset{n-1}{D}] = [H\overset{n-2}{T}\overset{n-1}{D}T] = \ldots$$

$$\ldots = [H\overset{n-1}{D}\overset{n-1}{T}] = [\overset{n-1}{D}H\overset{n-1}{T}] = [\overset{n-1}{D}[H\overset{n-1}{T}]]$$

Таким образом, $[H\overset{n-1}{T}]$ — перестановочная в G подгруппа. □

Лемма 3 (см. следствие 3.1.2 на с.198 [2]). *Пусть H и G подгруппы n-арной группы G. Тогда если $T \cap H \neq \varnothing$, то*

$$|[H\overset{n-1}{T}]| = \frac{|H||T|}{|H \cap T|}.$$

Лемма 4. *Пусть H — подгруппа n-арной группы G. Тогда если для некоторого элемента $x \in G$ и для некоторой обратной для x наследственности $\overline{x}$ имеет место $[N\overset{n-1}{N_1}] = G$, где $N_1 = xN\overline{x}$, то $N = N_1$.*

Доказательство. Пусть $x = (ab_1 \ldots b_{n-1})$, где $a \in N$ и $b_i \in N_1$. Пусть $\overline{b}_i$ — некоторая последовательность элементов из N_1, обратная для b_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$a = (ab_1 \ldots b_{n-1}\overline{b}_{n-1} \ldots \overline{b}_1) = (x\overline{b}_{n-1} \ldots \overline{b}_1)$$

Легко видеть, что $b_1 \ldots b_{n-1}x$ — последовательность, обратная для a. Значит, если $\overline{a}$ — некоторая последовательность элементов из N, обратная для a, то

$$N = [aN\overline{a}] = [(x\overline{b}_{n-1} \ldots \overline{b}_1)N(b_1, \ldots b_{n-1}\overline{x})] = [xN\overline{x}] = N_1.$$ □

Лемма 5. *Пусть x — элемент n-арной группы G и*

$$\varphi_x : G \to G$$

— отображение n-арной группы G в себя, определенное правилом

$$\varphi_x(g) = xg\overline{x},$$

где $\overline{x}$ — некоторая последовательность, обратная для x. Тогда φ_x — автоморфизм G.

Доказательство. Заметим, что если g_1^n произвольная последовательность элементов из G, то

$$\varphi_x(g_1 \ldots g_n) = x(g_1 \ldots g_n)\overline{x} = (x(g_1\overline{x}x)(g_2\overline{x}x) \ldots (g_{n-1}\overline{x}x)g_n\overline{x}) =$$
$$= ((xg_1\overline{x})(xg_2\overline{x}) \ldots (xg_n\overline{x})) = (g_1^{\varphi_x}g_2^{\varphi_x} \ldots g_n^{\varphi_x}),$$

т.е. φ_x — эндоморфизм n-арной группы G. Если $g \in G$, то $\varphi_x(\overline{x}gx) = (x(\overline{x}gx)\overline{x}) = g$. Таким образом, φ_x — эпиморфизм. Инъективность отображения φ_x очевидна. □

Теорема. *Если подгруппа H n-арной группы G перестановочна с любой другой подгруппой из G, то H субнормальна в G.*

Доказательство. Проведем индукцию по порядку $|G|$ n-арной группы G. Пусть N — наибольшая (по включению $\subseteq$) перестановочная подгруппа n-арной группы G, среди подгрупп из G, отличных от G и содержащих подгруппу H. Покажем, что N — нормальная подгруппа группы G. Допустим, что это не так. Тогда, согласно определения нормальной подгруппы, найдется элемент $x \in G$ такой, что $xN\overline{x} \neq N$, где $\overline{x}$ — некоторая последовательность, обратная для x. Рассмотрим теперь отображение

$$\varphi_x : G \to G,$$

задаваемое правилом

$$\varphi_x(g) = xg\overline{x}$$

для всех $g \in G$. Согласно лемме 5, φ_x — автоморфизм n-арной группы G. Это, в частности, означает, что $xN\overline{x}$ — перестановочная подгруппа n-арной группы G и $|N| = |xN\overline{x}|$. Применяя теперь лемму 1? мы видим, что

$$D = [\overset{n-1}{N_1} N] = [N \overset{n-1}{N_1}]$$

— содержащая N подгруппа n-арной группы G, где $N_1 = xN\overline{x}$. Согласно лемме 3 порядок такой подгруппы

$$d = |[\overset{n-1}{N_1} N]| = \frac{|N_1||N|}{|N_1 \cap N|}.$$

Поскольку $N \neq xN\overline{x}$ и поскольку $|N| = |xN\overline{x}|$, то $d > |N|$. Но согласно лемме 2 подгруппа D является перестановочной в G. В силу выбора подгруппы N последнее означает, что $D = G$. Но это противоречит лемме 4. Итак, N — нормальная подгруппа группы G. Так как, согласно выбору подгруппы N, имеет место $|N| < |G|$ и, очевидно, H — перестановочная подгруппа в N, то по выбору группы G мы можем заключить, что H — субнормальная подгруппа в N. Значит, H — субнормальная в G подгруппа. Теорема доказана. □

Abstract. It is proved that every permutable subgroup of a finite n-ary group is subnormal.

Литература

[1] А.И.Курош, Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года), М.: Наука, 1974.

[2] С.А.Русаков, Алгебраические n-арные системы, Мн.: Навука і тэхніка, 1992.

[3] S.E.Stonehewer, Permutable subgroups of infinite groups, Math. Z., 125 (1972), 1–16.

[4] R.Schmidt, Subgroup Lattices of Groups, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1994.

Applied Science University
Amman, Jordan
E-mail: awni69@yahoo.com

Поступило 20.03.2002