Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20G15

# Ограничения представлений алгебраических групп типа $C_n$ на длинную корневую $A_1$-подгруппу

А.А.Осиновская

В работе изучаются композиционные факторы ограничений неприводимых $p$-ограниченных представлений алгебраических групп типа $C_n$ $(n > 2)$ на подгруппы типа $A_1$, порожденные корневыми подгруппами, ассоциированными с длинными корнями $\alpha$ и $\alpha$ (длинные корневые $A_1$-подгруппы). Эти факторы найдены при $n = 3$. Данная статья продолжает работу автора [1], в которой найдены композиционные факторы ограничений неприводимых $p$-ограниченных представлений на корневые $A_1$-подгруппы для классических алгебраических групп, за исключением группы типа $C_n$, $n > 2$, и длинных корневых подгрупп. В статье [1] приводится также мотивировка постановки задачи, связанная с накоплением фактов для выдвижения общих гипотез об ограничениях представлений алгебраических групп на естественно вложенные подгруппы и изучением поведения корневых элементов в представлениях.

Далее $G = C_n(K)$, $n > 2$, $K$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, а $V_\omega$ — простой рациональный $G$-модуль с $p$-ограниченным старшим весом $\omega = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n$ (все $m_i < p$). Пусть $H$ — корневая $A_1$-подгруппа, соответствующая длинному корню. Для некоторого $G$-модуля $M$ обозначим через $\operatorname{Irr} M|S$ множество старших весов композиционных факторов (без учета их кратностей) ограничения $M|S$, где $S$ — подгруппа группы $G$. Если $M = V_\omega$, то вместо $\operatorname{Irr} V_\omega|S$ мы пишем $\operatorname{Irr}_S \omega$. Множество всех весов группы $H$ отождествляется с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, а множество доминантных весов — с множеством неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}$, поэтому можно отождествить $\operatorname{Irr}_H \omega$ с подмножеством в $\mathbb{N}$. Далее $\langle \omega, \alpha_{\max} \rangle$ есть значение веса $\omega$ на максимальном длинном корне $\alpha_{\max}$. В [1] определено множество $\operatorname{Irr}_H \omega$, за исключением случая

$$m_1 + \ldots + m_n + 3 \leqslant p < m_{n-1} + 2m_n + 3,$$

для которого получено следующее включение

$$\operatorname{Irr}_H \omega \supseteq \{ i \in \mathbb{N} \mid p - m_1 - \ldots - m_n - 2 \leqslant i \leqslant \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle \} . \tag{1}$$

Следующая теорема уточняет формулу (1) и дает описание композиционных факторов при $n = 3$.

**Теорема 1.** *Пусть $G = C_n(K)$, $m_1 + \ldots + m_n + 3 \leqslant p < m_{n-1} + 2m_n + 3$.*

*(i) Если $n = 3$, то*

$$\operatorname{Irr}_H \omega = \{ i \in \mathbb{N} \mid p - m_1 - m_2 - m_3 - 2 \leqslant i \leqslant \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle \} . \tag{2}$$

*(ii) Если $n > 3$, то либо*

$$\operatorname{Irr}_H \omega = \{ i \in \mathbb{N} \mid p - m_1 - \ldots - m_n - 2 \leqslant i \leqslant \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle \} , \tag{3}$$

*либо существует число $t \in \mathbb{N}$, такое что $t \leqslant p - m_1 - \ldots - m_n - 2$ и*

$$\operatorname{Irr}_H \omega = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant t \text{ или } p - m_1 - \ldots - m_n - 2 \leqslant i \leqslant \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle \} . \tag{4}$$

Заметим, что при $\omega = \omega_{n-1} + (p-3)\omega_n$ или $\omega = (p-1)\omega_n$ множество $\mathrm{Irr}_H\,\omega = \{(p-3)/2, (p-1)/2\}$ [2], т.е. выполняется формула (3).

**Обозначения.** Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Обозначим через $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$, $\rho$, $W(G)$, $\sigma_i \in W(G)$ и $\mathfrak{X}(G)$ множество простых корней группы $G$, занумерованных, как в [3], полусумму положительных корней, группу Вейля группы $G$, каноническое отражение, ассоциированное с простым корнем $\alpha_i$, и множество весов группы $G$, соответственно. При $\sigma \in W(G)$, $\mu \in \mathfrak{X}(G)$ положим $\sigma.\mu = \sigma(\mu+\rho)-\rho$. Для рационального $G$-модуля $M$ обозначим через $\mathrm{ch}(M)$ его формальный характер. Положим $\mathrm{ch}(\omega) = \mathrm{ch}(V_\omega)$. Пусть $W_\omega$ — модуль Вейля над $G$ со старшим весом $\omega$. Тогда, если $\mu$ — доминантный вес, положим $\chi(\mu) = \mathrm{ch}(W_\mu)$. В противном случае существует $\sigma \in W(G)$, для которого вес $\sigma.\mu$ доминантный, тогда положим $\chi(\mu) = (-1)^{l(\sigma)}\chi(\sigma.\mu)$. Здесь $l(\sigma)$ — длина $\sigma$, т.е. минимальное число $m$ среди всех разложений $\sigma$ в произведение отражений относительно простых корней $\sigma = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_m}$. Символ $n_{c_1c_2}(\omega)$ обозначает кратность фактора со старшим весом $c = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2$, записанным в терминах сигнатур $\varepsilon_i$, в ограничении $C_n(\mathbb{C})$-модуля $V_\omega$ на подгруппу $C_2(\mathbb{C})$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что выполняется условие $m_1 + \ldots + m_n + 3 \leqslant p < m_{n-1} + 2m_n + 3$. Для доказательства теоремы 1 понадобятся следующие результаты.

**Лемма 1.** *Пусть $G = C_3(K)$, тогда*

*(i) при $p = m_1 + m_2 + m_3 + 3$*

$$\mathrm{ch}\,\omega = \chi(\omega) - \chi(\omega');$$

*(ii) при $p > m_1 + m_2 + m_3 + 3$*

$$\mathrm{ch}\,\omega = \chi(\omega) - \chi(\omega') + \chi(\mu) - \chi(\nu),$$

*где*

$$\omega' = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 3 - p)\omega_1 + m_2\omega_2 + (p - m_2 - m_3 - 3)\omega_3,$$

$$\mu = (m_2 + 2m_3 + 2 - p)\omega_1 + (m_1 + m_2 + 1)\omega_2 + (p - m_1 - m_2 - m_3 - 4)\omega_3,$$

$$\nu = (m_2 + 2m_3 + 2 - p)\omega_1 + m_1\omega_2 + (p - m_1 - m_2 - m_3 - 4)\omega_3.$$

*Доказательство.* В силу формулы Янцена [4, часть II, пункт 8.19], для любого доминантного веса $\omega$ существует фильтрация $G$-модулей $W_\omega = U^0_\omega \supset U^1_\omega \supset U^2_\omega \supset \ldots$, такая что

$$\sum_{i>0} \mathrm{ch}\,U^i_\omega = \sum_{\alpha>0}\ \sum_{0<mp<\langle\omega+\rho,\alpha\rangle} \nu_p(mp)\chi(\sigma_{\alpha,mp}.\omega) \qquad (5)$$

и

$$W_\omega/U^1_\omega \cong V_\omega.$$

Здесь $\nu_p(mp)$ — максимальная степень числа $p$, которая делит $mp$, и $\sigma_{\alpha,mp}.\omega = \sigma_\alpha(\omega + \rho) + mp\alpha - \rho$.

Напомним, что $m_1+m_2+m_3+3 \leqslant p < m_2+2m_3+3$. Группа $G$ имеет 9 положительных корней, а именно $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $2\varepsilon_i$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, где $i < j$ [3]. Имеем

$$\langle \omega + \rho, \varepsilon_i - \varepsilon_j \rangle_{\max} = m_1 + m_2 + 2 < p,$$

$$\langle \omega + \rho, 2\varepsilon_i \rangle_{\max} = m_1 + m_2 + m_3 + 3 \leqslant p,$$

$$\langle \omega + \rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rangle = m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 5 > p,$$

$$\langle \omega + \rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \rangle = m_1 + m_2 + 2m_3 + 4 > p,$$

$$\langle \omega + \rho, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rangle = m_2 + 2m_3 + 3 > p.$$

Легко видеть, что $\langle \omega + \rho, \alpha \rangle < 2p$ для любого положительного корня $\alpha$. Поэтому

$$\sum_{i>0} \operatorname{ch} U^i_\omega = \chi(\sigma_{\varepsilon_2+\varepsilon_3,p}.\omega) + \chi(\sigma_{\varepsilon_1+\varepsilon_3,p}.\omega) + \chi(\sigma_{\varepsilon_1+\varepsilon_2,p}.\omega) = \tag{6}$$

$$= \chi(\omega') + \chi(\omega'') + \chi(\omega''').$$

Здесь

$$\omega' = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 3 - p)\omega_1 + m_2\omega_2 + (p - m_2 - m_3 - 3)\omega_3,$$

$$\omega'' = (p - m_2 - 2m_3 - 4)\omega_1 + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 4 - p)\omega_2 + (p - m_1 - m_2 - m_3 - 4)\omega_3,$$

$$\omega''' = m_1\omega_1 + (p - m_1 - m_2 - 2m_3 - 5)\omega_2 + m_3\omega_3.$$

Положим

$$\nu = \sigma_1.\sigma_2.\omega''' = (m_2 + 2m_3 + 2 - p)\omega_1 + m_1\omega_2 + (p - m_1 - m_2 - m_3 - 4)\omega_3.$$

Тогда $\chi(\omega''') = \chi(\nu)$. Если $p = m_1 + m_2 + m_3 + 3$, то $\chi(\nu) = 0$, в противном случае $\chi(\nu) = \operatorname{ch}(\nu)$ ввиду (5).

Положим

$$\mu = \sigma_1.\omega'' = (m_2 + 2m_3 + 2 - p)\omega_1 + (m_1 + m_2 + 1)\omega_2 + (p - m_1 - m_2 - m_3 - 4)\omega_3,$$

тогда $\chi(\omega'') = -\chi(\mu)$. Если $p = m_1 + m_2 + m_3 + 3$, то $\chi(\mu) = 0$, в противном случае вес $\mu$ доминантный. В силу (5) $\sum_{i>0} \operatorname{ch} U^i_\mu = \chi(\nu) = \operatorname{ch}(\nu)$.

Вес $\omega'$ доминантный. Ввиду (5) $\sum_{i>0} \operatorname{ch} U^i_{\omega'} = \chi(\mu') + \chi(\mu)$, где

$$\mu' = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 3 - p)\omega_1 - (m_1 + 2)\omega_2 + (p - m_2 - m_3 - 3)\omega_3.$$

Имеем $\sigma_2.\mu' = \nu$ и, следовательно, $\chi(\mu') = -\chi(\nu)$.

Заметим, что если правая часть формулы (5) для некоторого веса $\lambda$ представляется в виде суммы характеров различных неприводимых модулей, то $U^i_\lambda = 0$ для $i > 1$, а значит, $\sum_{i>1} \operatorname{ch} U^i_\lambda = 0$ и можно определить $\operatorname{ch} U^1_\lambda$. Отсюда и из (6) при $m_1 + m_2 + m_3 + 3 = p$ получаем $\chi(\omega) = \operatorname{ch}(\omega) + \operatorname{ch}(\omega') = \operatorname{ch}(\omega) + \chi(\omega')$. Если же $m_1 + m_2 + m_3 + 3 < p$, то $\chi(\mu) = \operatorname{ch}(\mu) + \operatorname{ch}(\nu)$, $\chi(\omega') = \operatorname{ch}(\omega') + \operatorname{ch}(\mu)$, $\sum_{i>0} \operatorname{ch} U^i_\omega = \operatorname{ch}(\omega')$ и $\chi(\omega) = \operatorname{ch}(\omega) + \chi(\omega') - \chi(\mu) + \chi(\nu)$, что и требовалось доказать. □

**Лемма 2.** *Пусть $\Gamma = C_3(\mathbb{C})$, $\lambda \in \{\omega, \omega', \mu, \nu\}$, причем вес $\mu$ или $\nu$ доминантный, если $\lambda = \mu$ или $\lambda = \nu$. Тогда кратности $n_{c_1c_2}(\lambda)$ задаются таблицей, где число $n^i_{c_1c_2}(\lambda)$ равно искомой кратности при условиях $i$ на $c_1$, $c_2$.*

| $\lambda$ | $i$ | $c_1, c_2$ | $n^i_{c_1c_2}(\lambda)$ |
|---|---|---|---|
| $\omega$ | 1 | $m_2 + m_3 \geqslant c_1 \geqslant m_3$, $m_3 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_1+1)(c_1-m_3+1)(c_2+1)$ |
| | 2 | $m_1+m_2+m_3 \geqslant c_1 > m_2+m_3$, $m_3 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_1+m_2+m_3-c_1+1)(m_2+1)(c_2+1)$ |
| | 3 | $m_2+m_3 \geqslant c_1 \geqslant c_2 > m_3$ | $(m_1+1)(c_1-c_2+1)(m_3+1)$ |
| | 4 | $m_1+m_2+m_3 \geqslant c_1 > m_2+m_3$, $m_2+m_3 \geqslant c_2 > m_3$ | $(m_1+m_2+m_3-c_1+1)(m_2+m_3-c_2+$ $+1)(m_3+1)$ |
| $\omega'$ | 1 | $p-m_3-3 \geqslant c_1 \geqslant p-m_2-m_3-3$, $p-m_2-m_3-3 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_1+m_2+2m_3+4-p)(c_1+m_2+m_3+$ $+4-p)(c_2+1)$ |
| | 2 | $m_1+m_2+m_3 \geqslant c_1 > p-m_3-3$, $p-m_2-m_3-3 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_1+m_2+m_3-c_1+1)(m_2+1)(c_2+1)$ |
| | 3 | $p-m_3-3 \geqslant c_1 \geqslant c_2 > p-m_2-$ $-m_3-3$ | $(m_1+m_2+2m_3+4-p)(c_1-c_2+1)(p-$ $-m_2-m_3-2)$ |
| | 4 | $m_1+m_2+m_3 \geqslant c_1 > p-m_3-3$, $p-m_3-3 \geqslant c_2 > p-m_2-m_3-3$ | $(m_1+m_2+m_3-c_1+1)(p-m_3-c_2-$ $-2)(p-m_2-m_3-2)$ |
| $\mu$ | 1 | $p-m_3-3 \geqslant c_1 \geqslant p-m_1-m_2-$ $-m_3-4$, $p-m_1-m_2-m_3-4 \geqslant$ $\geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_2+2m_3+3-p)(c_1+m_1+m_2+m_3+$ $+5-p)(c_2+1)$ |
| | 2 | $m_2+m_3-1 \geqslant c_1 > p-m_3-3$, $p-m_1-m_2-m_3-4 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_2+m_3-c_1)(m_1+m_2+2)(c_2+1)$ |
| | 3 | $p-m_3-3 \geqslant c_1 \geqslant c_2 > p-m_1-$ $-m_2-m_3-4$ | $(m_2+2m_3+3-p)(c_1-c_2+1)(p-m_1-$ $-m_2-m_3-3)$ |
| | 4 | $m_2+m_3-1 \geqslant c_1 > p-m_3-3$, $p-m_3-3 \geqslant c_2 > p-m_1-m_2-$ $-m_3-4$ | $(m_2+m_3-c_1)(p-m_3-c_2-2)(p-m_1-$ $-m_2-m_3-3)$ |
| $\nu$ | 1 | $p-m_2-m_3-4 \geqslant c_1 \geqslant p-m_1-$ $-m_2-m_3-4$, $p-m_1-m_2-$ $-m_3-4 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_2+2m_3+3-p)(c_1+m_1+m_2+m_3+$ $+5-p)(c_2+1)$ |
| | 2 | $m_3-2 \geqslant c_1 > p-m_2-m_3-4$, $p-m_1-m_2-m_3-4 \geqslant c_2 \geqslant 0$ | $(m_3-c_1-1)(m_1+1)(c_2+1)$ |
| | 3 | $p-m_2-m_3-4 \geqslant c_1 \geqslant c_2 > p-$ $-m_1-m_2-m_3-4$ | $(m_2+2m_3+3-p)(c_1-c_2+1)(p-m_1-$ $-m_2-m_3-3)$ |
| | 4 | $m_3-2 \geqslant c_1 > p-m_2-m_3-4$, $p-m_2-m_3-4 \geqslant c_2 > p-m_1-$ $-m_2-m_3-4$ | $(m_3-c_1-1)(p-m_2-m_3-c_2-3)(p-$ $-m_1-m_2-m_3-3)$ |

*Доказательство.* Предположим сначала, что $\lambda = \omega$. Воспользуемся правилами ветвления [5]. Применяя их для группы $C_3(\mathbb{C})$, имеем

$$V_\omega | C_2(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_b \bigoplus_c V_c,$$

где $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2)$,

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqslant b_1 \geqslant m_2 + m_3 \geqslant b_2 \geqslant m_3 \geqslant b_3 \geqslant 0,$$

$$b_1 \geqslant c_1 \geqslant b_2 \geqslant c_2 \geqslant b_3$$

и $b_i, c_i \in \mathbb{N}$. Отсюда следует лемма для $\lambda = \omega$. Кратности $n_{c_1 c_2}(\omega)$ зависят только от соотношений между $c_i$ и $m_i$, естественно выделяются 4 случая, указанные в таблице 1, поэтому для обозначения соответствующих кратностей используются символы $n^i_{c_1 c_2}(\omega)$. Для весов $\omega'$, $\mu$ и $\nu$ доказательство аналогично. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $\Gamma = C_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$, $\omega$ — доминантный вес группы $\Gamma$ и $w = w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 \in \mathrm{Irr}_{C_2(\mathbb{C})}\,\omega$. Тогда*

$$w_1 \leqslant m_1 + \ldots + m_n, \qquad w_2 \leqslant m_2 + \ldots + m_n.$$

*При $n = 3$ имеем также $w_1 \geqslant m_3$.*

*Доказательство.* Применяя правила ветвления [5], получаем

$$V_\omega | C_{n-1}(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_b \bigoplus_c V_c,$$

где $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_{n-1})$, такие что

$$m_1 + \ldots + m_n \geqslant b_1 \geqslant m_2 + \ldots + m_n \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n \geqslant b_n \geqslant 0,$$

$$b_1 \geqslant c_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{n-1} \geqslant c_{n-1} \geqslant b_n,$$

причем числа $b_i$ и $c_j$ в этих формулах целые. Поэтому $c_1 \leqslant m_1 + \ldots + m_n$, $c_2 \leqslant m_2 + \ldots + m_n$ для любого фактора рассматриваемого ограничения. При $n = 3$ имеем $c_1 \geqslant b_2 \geqslant m_3$. Если $n > 3$, завершаем доказательство, используя индукцию по $n$. $\square$

**Лемма 4 ( [1]).** *Пусть* $\mathrm{char}\, K > 2$ *и $c = (c_1, c_2)$ — доминантный $p$-ограниченный вес группы $C_2(K)$. Тогда*

(i) *Если $c_1 + c_2 + 3 \leqslant p$, то $\mathrm{ch}(c) = \chi(c)$, $\mathrm{Irr}_H\, c = \{0, \ldots, c_1\}$.*

(ii) *Если $c_1 + 3 \leqslant p < c_1 + c_2 + 3$, то $\mathrm{ch}(c) = \chi(c) - \chi(c^*)$, $\mathrm{Irr}_H\, c = \{p - c_1 - 2, \ldots, c_1\}$, где $c^* = (p - c_2 - 3, p - c_1 - 3)$.*

*Доказательство теоремы 1.* Напомним, что $\mathrm{char}\, K > 2$. Положим $S = C_2(K)$. Сначала докажем утверждение (ii).

Заметим, что если вес $c = (c_1, c_2) \in \mathrm{Irr}_S\, \omega$, то $c \in \mathrm{Irr}\, W_\omega | S$. Но

$$\mathrm{ch}(W_\omega | S) = \sum_w \mathrm{ch}(W_w),$$

где веса $w$ такие, как в лемме 3. Поэтому имеем $c_1 + 3 \leqslant m_1 + m_2 + m_3 + 3 \leqslant p$. Из леммы 4 вытекает следующее.

1.) Пусть $c_1 + c_2 + 3 \leqslant p$. Тогда $W_c = V_c$ и $\mathrm{Irr}_H\, c = \{0, \ldots, c_1\}$. При этом $(c_1)_{\min} = 0$.

2.) Пусть $c_1 + 3 \leqslant p < c_1 + c_2 + 3$. Тогда $\mathrm{ch}(W_c) = \mathrm{ch}(V_c) + \mathrm{ch}(V_{(p-c_2-3, p-c_1-3)})$ и $\mathrm{Irr}_H(p - c_2 - 3, p - c_1 - 3) = \{0, \ldots, p - c_2 - 3\}$, $\mathrm{Irr}_H\, c = \{p - c_1 - 2, \ldots, c_1\}$. При этом $(p - c_2 - 3)_{\min} = p - m_2 - \ldots - m_n - 3 \geqslant p - m_1 - m_2 - \ldots - m_n - 3$ и $(p - c_1 - 2)_{\min} = p - m_1 - m_2 - \ldots - m_n - 2$.

Согласно формуле (1)

$$\operatorname{Irr}_H \omega \supseteq \{i \in \mathbb{N} \mid p - m_1 - \ldots - m_n - 2 \leqslant i \leqslant \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle\}.$$

Отсюда ясно, что если $\operatorname{Irr}_S \omega$ содержит вес $(c_1, c_2)$ с $c_1 + c_2 + 3 \leqslant p$, то справедлива формула (4), а в противном случае имеет место (3). Часть (ii) доказана.

Пусть $n = 3$. В силу сказанного выше достаточно доказать, что в этой ситуации $\operatorname{Irr}_S \omega$ не содержит факторов $V_c$ с $c_1 + c_2 + 3 \leqslant p$.

Введем $n^i_{c_1c_2}(\lambda)^* = n^i_{p-c_2-3,p-c_1-3}(\lambda)$. Тогда

$$n^1_{c_1c_2}(\omega)^* = (m_1 + 1)(p - c_2 - m_3 - 2)(p - c_1 - 2),$$

$$n^2_{c_1c_2}(\omega)^* = (m_1 + m_2 + m_3 + c_2 + 4 - p)(m_2 + 1)(p - c_1 - 2),$$

$$n^3_{c_1c_2}(\omega)^* = n^3_{c_1c_2}(\omega),$$

$$n^4_{c_1c_2}(\omega)^* = (m_1 + m_2 + m_3 + c_2 + 4 - p)(m_2 + m_3 + c_1 + 4 - p)(m_3 + 1),$$

$$n^3_{c_1c_2}(\omega')^* = n^3_{c_1c_2}(\omega'),$$

$$n^4_{c_1c_2}(\omega')^* = (m_1 + m_2 + m_3 + c_2 + 4 - p)(c_1 - m_3 + 1)(p - m_2 - m_3 - 2),$$

$$n^3_{c_1c_2}(\mu)^* = n^3_{c_1c_2}(\mu),$$

$$n^4_{c_1c_2}(\mu)^* = (m_2 + m_3 + c_2 + 3 - p)(c_1 - m_3 + 1)(p - m_1 - m_2 - m_3 - 3).$$

В дальнейшем мы пишем просто $n(\omega)$ и $n(\omega)^*$, опуская $c_1$, $c_2$.

1.) Пусть $p = m_1 + m_2 + m_3 + 3$. Тогда $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega')$.

а.) Рассмотрим сначала случай $m_3 \leqslant p - m_3 - 3$. Применяя леммы 1, 2 и 4, получаем, что кратность фактора $V_c$ в зависимости от значений $c_1$, $c_2$ равна одному из следующих выражений $n^4(\omega)^* - n^1(\omega')$, $n^3(\omega)^* - n^3(\omega')$, $n^4(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^1(\omega) - n^1(\omega')$, $n^2(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^1(\omega) - n^2(\omega')$, $n^1(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^1(\omega) - n^4(\omega')$, $n^3(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^1(\omega) - n^3(\omega')$, $n^3(\omega)^* - n^3(\omega')^* + n^3(\omega) - n^3(\omega')$, $n^3(\omega) - n^3(\omega')$ и $n^1(\omega) - n^4(\omega')$ (при условии $c_1 + c_2 + 3 = p$). Легко видеть, что все эти выражения равны 0.

б.) Теперь пусть $m_3 > p - m_3 - 3$. Тогда кратность $V_c$ в зависимости от значений $c_1$, $c_2$ либо совпадает с одним из выражений в предыдущем абзаце, либо равна $n^2(\omega)^* - n^2(\omega')$ и $n^1(\omega)^* - n^4(\omega')$. Снова во всех случаях получаем 0.

2.) Теперь предположим, что $p > m_1 + m_2 + m_3 + 3$. Тогда $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega') + \chi(\mu) - \chi(\nu)$.

а.) Пусть $m_3 \leqslant p - m_3 - 3$. Для кратностей факторов $V_c$ при различных $c$ получаем выражения: $n^3(\omega) - n^3(\omega') + n^3(\mu)$ (при условии $c_1 + c_2 + 3 = p$), $n^3(\omega)^* - n^3(\omega')^* + n^3(\mu)^* + n^3(\omega) - n^3(\omega') + n^3(\mu)$, $n^3(\omega)^* - n^3(\omega') + n^3(\mu)$, $n^1(\omega) - n^4(\omega') + n^4(\mu)$ (при условии $c_1 + c_2 + 3 = p$), $n^1(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^4(\mu)^* + n^1(\omega) - n^4(\omega') + n^4(\mu)$, $n^3(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^4(\mu)^* + n^1(\omega) - n^3(\omega') + n^3(\mu)$, $n^2(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^4(\mu) + n^1(\omega) - n^2(\omega')$, $n^4(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^3(\mu) + n^1(\omega) - n^1(\omega')$, $n^1(\omega) - n^1(\omega') + n^1(\mu)$, $n^1(\omega) - n^2(\omega') + n^2(\mu)$,

$-n^1(\omega')+n^1(\mu)$ (при условии $c_1 = m_3-1$), $-n^1(\omega')+n^1(\mu)-n^2(\nu)$, $n^4(\omega)^*-n^1(\omega')+n^3(\mu)$ (при условии $c_1 = m_3-1$), $n^4(\omega)^* - n^1(\omega') + n^3(\mu) - n^4(\nu)$. Все они равны 0.

б.) Пусть $m_3 > p - m_3 - 3$. Для кратностей факторов $V_c$ получаем выражения: $n^3(\omega)^* - n^3(\omega') + n^3(\mu)$, $n^1(\omega)^* + n^4(\mu) - n^4(\omega')$, $n^1(\omega) - n^4(\omega') + n^4(\mu)$ (при условии $c_1 + c_2 + 3 = p$), $n^1(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^4(\mu)^* + n^1(\omega) - n^4(\omega') + n^4(\mu)$, $n^2(\omega)^* - n^4(\omega')^* + n^4(\mu) + n^1(\omega) - n^2(\omega')$, $n^1(\omega) - n^2(\omega') + n^2(\mu)$, $n^2(\omega)^* - n^2(\omega') + n^4(\mu)$ (при условии $c_1 = m_3 - 1$), $-n^2(\omega') + n^2(\mu)$ (при условии $c_1 = m_3 - 1$), $n^2(\omega)^* - n^2(\omega') + n^4(\mu) - n^4(\nu)$, $-n^2(\omega') + n^2(\mu) - n^2(\nu)$, $n^4(\omega)^* - n^1(\omega') + n^3(\mu) - n^4(\nu)$, $-n^1(\omega') + n^1(\mu) - n^2(\nu)$. Все они равны 0.

Таким образом, теорема доказана. □

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Супруненко И. Д. за ценные консультации и постоянное внимание к работе.

**Abstract.** Restrictions of irreducible representations of algebraic groups of type $C_n$ $(n \geqslant 3)$ to long root $A_1$-subgroups, i.e. subgroups of type $A_1$ generated by root subgroups associated with two opposite long roots, are studied. Composition factors of such restrictions are found for $n = 3$.

## Литература

[1] А.А.Осиновская, Ограничения представлений классических алгебраических групп на корневые $A_1$-подгруппы, Докл. НАНБ., 45:4 (2001), С. 31–33.

[2] А.Е.Залесский, И.Д.Супруненко, Представления размерности $(p^n \pm 1)/2$ симплектической группы степени $2n$ над конечным полем, Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 6 (1987), С. 9–15.

[3] Н.Бурбаки, Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI, М.: Мир, 1972.

[4] J.C.Jantzen, Representations of Algebraic Groups, Orlando: Academic Press, 1987.

[5] Д.П.Желобенко, Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений, УМН, 17:1 (1962), С. 27–120.

Институт математики НАН Беларуси
E-mail: anna@im.bas-net.by

Поступило 24.04.2002