4. **Peebles F., Garber H.** «J. Chem. Engng Progr.», 1953, v. 49, N 2, p. 88.
5. **Константинов С. М., Кисуркин А. А., Недужко Е. А.** «Изв. вузов. Энергетика», 1976, № 2, с. 90.
6. **Уоллис Г. Б.** Одномерные двухфазные течения. М., «Мир», 1972.
7. **Полянин Л. Н., Путов А. Л.** «Атомная энергия», 1979, т. 47, вып. 1, с. 56.
8. **Uga T.** «Nucl. Engng and Design», 1972, v. 22, p.252.

Поступило в Редакцию 19.02.80

УДК 621.039.512.4

Нестационарная диффузия нейтронов в системе из двух сред с плоской границей раздела

ЖЕМЕРЕВ А. В., МЕДВЕДЕВ Ю. А., МЕТЁЛКИН Е. В.

Процесс распространения нейтронов энергией $\leqslant$ 1МэВ в веществе, согласно работам [1, 2], можно разделить на две стадии. В первой — нейтроны замедляются за счет упругих соударений с ядрами, а затем, замедлившись до тепловой энергии, диффундируют без потерь энергии до тех пор, пока не исчезнут в результате процессов поглощения. Нестационарное замедление нейтронов в однородных средах исследовано достаточно подробно [3, 4]. Однако для решения широкого круга прикладных задач необходимо рассчитать нестационарное нейтронное распределение в системе, состоящей из нескольких сред с резко различающимися свойствами в отношении переноса нейтронов. Такие задачи возникают, например, при исследовании распространения нейтронного импульса в атмосфере с учетом влияния поверхности земли (или воды), при исследовании нейтронно-физических параметров замедлителей и размножающих сред, составленных из различных материалов, и т. п.

В работе [5] рассматривалось замедление нейтронов в системе, состоящей из двух различных сред с плоской границей раздела, т. е. первая стадия распространения нейтронов. В настоящей работе изучается вторая стадия этого процесса — нестационарная диффузия тепловых нейтронов в системе из двух сред с плоской границей раздела. Источник тепловых нейтронов считается импульсным и точечным, т. е. определяется функция Грина уравнения диффузии. Распределение тепловых нейтронов от источников быстрых нейтронов можно найти, вычислив свертку этой функции Грина с распределением замедлившихся нейтронов, определяемым при исследовании первой стадии процесса их распространения.

Пространственно-временное распределение тепловых нейтронов от точечного источника, расположенного в точке r_0, описывается следующим уравнением [1]:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\frac{l}{3(1+g-\mu)}\Delta\Phi(\mathbf{r},t)+\frac{1}{l_a}\Phi(\mathbf{r},t)=\delta(t)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{1}$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — поток тепловых нейтронов; v — их скорость; l и l_a — длина свободного пробега нейтронов до рассеяния и поглощения соответственно; $g = l/l_a$; μ — средний косинус угла рассеяния.

Будем считать, что граница раздела сред совпадает с плоскостью $z = 0$, а источник нейтронов находится на оси $0z$ в точке $z = z_0 > 0$. Переходя к безразмерным переменным

$$t'=\frac{vt}{l_2};\ \{x',y',z'\}=\frac{\sqrt{3(1+g_2-\mu_2)}}{l_2}\{x,y,z\}, \tag{2}$$

уравнение (1) для каждой среды можно представить в следующем виде:

$$\text{при } z<0\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-a\delta^2\Delta\Phi_1+\frac{1}{a}g_1\Phi_1=0; \tag{3а}$$

$$\text{при } z>0\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\Delta\Phi_2+g_2\Phi_2=s_{\text{т}}\delta(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0), \tag{3б}$$

где $a = l_1/l_2$; $\delta^2 = (1 + g_2 - \mu_2)/(1 + g_1 - \mu_1)$; $g_i = l_i/l_{ai}$; $i = 1, 2$; $s_{\text{т}} = v[\sqrt{3(1 + g_2 - \mu_2)}/l_2]^3$.

Везде далее знак «штрих» у переменных для простоты опустим и предположим, что первая среда плотнее второй, т. е. $a < 1$. На границе раздела ($z = 0$) функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять следующим условиям сшивки:

$$\Phi_1=\Phi_2;\ a\delta^2(\partial\Phi_1/\partial z)=\partial\Phi_2/\partial z, \tag{4}$$

соответствующим непрерывности потока и тока нейтронов через границу.

Используя преобразование Лапласа (переменная p) по времени и преобразование Фурье (переменные k_x и k_y) по пространственным переменным x и y, а также условия сшивки (4), легко получить выражения для образов решения системы (3):

$$\Phi_2=\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{p+k^2+g_2}\,|z-z_0|]}{2\sqrt{p+k^2+g_2}}-\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{p+k^2+g_2}\,(z+z_0)]}{2\sqrt{p+k^2+g_2}}+\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{p+k^2+g_2}\,(z+z_0)]}{\sqrt{p+k^2+g_2}+\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}; \tag{5}$$

$$\Phi_1=\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{p+k^2+g_2}\,z_0+\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}\,(z/a\delta)]}{\sqrt{p+k^2+g_2}+\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}, \tag{6}$$

где $k^2 = k_x^2 = k_y^2$.

Легко также определить соответствующие выражения и в том случае, когда источник нейтронов находится в более плотной среде (при $z = -z_0$):

$$\Phi_2=\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}\,(z_0/\delta a)-\sqrt{p+k^2+g_2}\,z]}{\sqrt{p+k^2+g_2}+\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}; \tag{7}$$

$$\Phi_1=\frac{s_{\text{т}}\exp[-\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}\,(|z+z_0|a\delta)]}{2\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}-\frac{s_{\text{т}}\exp\left[-\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}\,\frac{(z_0-z)}{a\delta}\right]}{2\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}+\frac{s_{\text{т}}\exp\left[-\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}\left(\frac{z_0-z}{a\delta}\right)\right]}{\sqrt{p+k^2+g_2}+\delta\sqrt{ap+a^2\delta^2k^2+g_1}}. \tag{8}$$

Отметим, что каждое слагаемое в выражениях (5) и (8) имеет вполне определенный физический смысл. Первое слагаемое — решение уравнения диффузии для однородной среды, в которой находится источник, второе — определяет утечку нейтронов и является решением аналогичной задачи с «отрицательным» источником, третье — определяет влияние соседней среды на процесс диффузии в данной. Таким образом, первые два слагаемых в выражениях (5) и (8) представляют собой функцию распределения нейтронов, диффундирующих только в данной среде. Выражения (5)—(8) имеют достаточно сложный вид, затрудняющий вычисление оригиналов. Однако в одном случае, представляющем практический интерес, они значительно упрощаются: при контакте двух сред с сильно различающейся плотностью.

Рассмотрим вначале плоский источник нейтронов, находящийся в менее плотной среде (плоскость $z = z_0$). Решение уравнения диффузии в этом случае можно получить из выражений (5) и (6), приняв в них $k = 0$. При отсутствии поглощения ($g_1 = g_2 = 0$), используя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\Phi_2 = s_n \frac{\exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4t}\right]}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{(1-\delta\sqrt{a})}{(1+\delta\sqrt{a})} s_n \frac{\exp\left[-\frac{(z+z_0)^2}{4t}\right]}{\sqrt{4\pi t}}; \tag{9}$$

$$\Phi_1 = s_n \frac{\exp[-(z_0 - z/\delta\sqrt{a})^2/4t]}{(1+\delta\sqrt{a})\sqrt{\pi t}}, \tag{10}$$

где $s_n = (v/l_2)\sqrt{3(1+g_2-\mu_2)}$. Если первая среда значительно плотнее второй ($a \ll 1$), то в выражении (9) можно считать $a = 0$, и это выражение переходит в решение задачи с нулевым потоком нейтронов через границу. Точно к такому же результату придем, если при решении системы (3а) и (3б) в уравнении (3а) будем пренебрегать производной по времени, т. е., определив нестационарное решение уравнения диффузии во второй среде, будем сшивать его [см. выражение (4)] с соответствующим стационарным решением для первой среды. Физический смысл этого приближения обусловлен тем, что первая среда значительно плотнее второй ($l_1 \ll l_2$) и нейтроны в ней диффундируют гораздо быстрее, так как $\langle z\rangle \sim \sqrt{vt/l}$. В таком случае решение уравнения диффузии в первой среде будет квазистационарным. Его можно получить из выражения (10), приняв в нем $z = 0$, а затем $a = 0$. Это решение будет совпадать со значением функции Φ_2 на границе раздела ($z = 0$). Очевидно, что это приближение является более точным для второй, менее плотной среды, а в первой при отсутствии поглощения оно справедливо на небольших расстояниях от границы раздела ($z \ll \delta\sqrt{az_0}$), где находится много нейтронов, побывавших во второй среде.

При наличии поглощения, приняв в формуле (5) $a = 0$ и воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, получим

$$\Phi_2 = \frac{s_n \exp(-g_2 t)}{\sqrt{4\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4t}\right] + \exp\left[-\frac{(z+z_0)^2}{4t}\right]\right\} - s_n \exp(-g_2 t)\,\delta\sqrt{g_1} \times$$
$$\times \exp[\delta\sqrt{g_1}(z+z_0) + \delta^2 g_1 t]\,\mathrm{Erfc}\left[\frac{z+z_0}{2\sqrt{t}} + \delta\sqrt{g_1 t}\right], \tag{11}$$

где $\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \mathrm{Erf}(z)$, а $\mathrm{Erf}(z)$ — функция ошибок [6].

Воспользовавшись асимптотическим выражением $\mathrm{Erfc}(z) \approx \exp(-z^2)/\sqrt{\pi}z$ (при $z \geqslant 3$ [6]), функцию (11) можно представить в виде

$$\Phi_2 = \frac{s_n \exp(-g_2 t)}{\sqrt{4\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4t}\right] + \frac{(z+z_0-2\delta\sqrt{g_1}t)}{(z+z_0+2\delta\sqrt{g_1}t)}\exp\left[-\frac{(z+z_0)^2}{4t}\right]\right\}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что в начальные моменты времени [при $t < (z+z_0)/2\delta\sqrt{g_1}$] функция распределения (12) принимает большие значения, чем решение соответствующей задачи в однородной среде (первое слагаемое), а в более поздние моменты времени [$t > (z+z_0)/2\delta\sqrt{g_1}$] — меньшие. Такое поведение функции распределения обусловлено сильным различием плотности контактирующих сред [см. выражение (9)] и наличием поглощения в первой, более плотной среде.

Приняв в формуле (6) $k = 0$ и $ap = 0$ и воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, получим

$$\Phi_1(z, t) = \exp[(\sqrt{g_1}/a\delta)z]\quad \Phi_2(z=0, t), \tag{13}$$

где Φ_2 определяется выражением (11). Отсюда следует, что решение уравнения диффузии в первой, более плотной среде ($a \ll 1$) является квазистационарным. Поскольку при $t \geqslant 1$ характерные $p \leqslant 1$, то полученное решение (13) является хорошим приближением при $g_1 \gg a$, так как именно в этом случае можно в формуле (6) пренебречь членом ap по сравнению с g_1. При этом необходимо иметь в виду, что диффузионное приближение справедливо при $g_1 \ll 1$. Отмеченные два условия ($g_1 \gg a$, $g_1 \ll 1$) не находятся в противоречии, так как мы считаем, что первая среда значительно плотнее второй, т. е. $a \ll 1$. (Для системы земля — воздух $a \approx 5\cdot 10^{-4}$[2]).

Предположим теперь, что источник нейтронов расположен в более плотной среде [см. выражения (7); (8)] и $a \ll 1$. Приняв в формуле (7) $k = 0$, пренебрегая членом ap и воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, получим

$$\Phi_2 = s_n \exp\left[-g_2 t - \frac{\sqrt{g_1}}{a\delta} z_0\right]\left\{\frac{\exp[-z^2/4t]}{\sqrt{\pi t}} - \delta\sqrt{g_1}\exp[z\delta\sqrt{g_1} + \delta^2 g_1 t]\,\mathrm{Erfc}\left[\frac{z}{2\sqrt{t}} + \delta\sqrt{g_1 t}\right]\right\}. \tag{14}$$

Выражение (14) является, очевидно, хорошим приближением для решения уравнения диффузии, если $a \ll g_1 \ll 1$ (см. выше).

Приняв в выражении (8) $k = 0$, а в последнем слагаемом и $ap = 0$ и воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, получим

$$\Phi_1 = \frac{s_n \exp[-g_1 t/a]}{\delta\sqrt{a}\sqrt{4\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(z+z_0)^2}{4a\delta^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4a\delta^2 t}\right]\right\} + s_n \exp\left[-g_2 t - \frac{\sqrt{g_1}}{a\delta}(z_0 - z)\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \delta\sqrt{g_1}\exp(\delta^2 g_1 t)\times \mathrm{Erfc}(\delta\sqrt{g_1 t})\right\}. \tag{15}$$

Первое слагаемое в формуле (15) описывает диффузию нейтронов, не попавших во вторую среду. Второе слагаемое представляет собой функцию распределения нейтронов, побывавших во второй среде. Эта функция распределения является квазистационарной, и ее можно представить в виде (13), где Φ_2 будет определяться выражением (14).

Рассмотрим точечный источник нейтронов и будем предполагать, что первая среда значительно плотнее второй ($a \ll 1$). В таком случае, приняв в выражениях (5)—(8) $a^2\delta^2k^2 = 0$, получим

$$\Phi_i = \frac{s_\text{т}}{s_n}\frac{\exp(-\rho^2/4t)}{4\pi t}\Phi_{i,\,\text{пл}}\quad (i = 1, 2),$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$; $\Phi_{i,\text{пл}}$ — решение соответствующей задачи с плоским источником, полученное ранее [см. выражения (11), (13)—(15)].

Представление функции распределения в виде (16) отражает тот факт, что нейтроны, попавшие из менее плотной среды в более плотную, вылетают из той же точки, в которую они влетели, поскольку в более плотной среде они имеют значительно меньшую длину свободного пробега. Кроме этого, диффузия нейтронов в более плотной среде на значительные расстояния обусловлена нейтронами, попавшими в нее из менее плотной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вейнберг А., Вигнер Е.** Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. **Ямпольский П. А.** Нейтроны атомного взрыва. М.' Атомиздат, 1961.
3. **Казарновский М. В.** В кн.: Труды ФИАН, 1959, т. 11, с. 176.
4. **Казарновский М. В.** В кн.: Теоретические и экспериментальные проблемы нестационарного переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972.
5. **Медведев Ю. А., Метелкин Е. В.** «Атомная энергия», 1980, т. 48, вып. 5, с. 308.
6. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

Поступило в Редакцию 19.02.80

УДК 621.039.564.2:621.039.512.45

Перекосы поля нейтронов в реакторах при случайно распределенных возмущениях макросечений

ГОРЮНОВ В. К.

При восстановлении поля нейтронов по результатам измерений в отдельных областях реактора, а также при физическом расчете мощности ТВС возникает вопрос о точности получаемых результатов, в частности, о связи между точностью результата и погрешностью исходных данных — макроскопических сечений взаимодействия. В большом числе задач можно или приходится предполагать случайным распределение погрешностей в макросечениях по элементам активной зоны, например, по ТВС.

Изменение первоначального поля нейтронов в результате наложения случайно распределенных возмущений макросечений при большом числе ТВС не является тривиальным повторением характера возмущений. «Мелкомозаичная» структура кусочно-постоянных в пределах каждой ТВС возмущений, как оказалось, приводит к глобальным, охватывающим до половины активной зоны перекосам поля нейтронов.

Для практики имеет также важное значение факт многократного усиления размаха флюктуаций поля нейтронов в сравнении с характерными значениями возмущений. Оценки средних квадратических флюктуаций мощности ТВС при среднем квадратическом возмущении макросечений 1 % сделаны в работах [1—3] методом статистического моделирования. Результаты показывают 2,5 — 11-кратное усиление флюктуаций в мощности ТВС для реакторов на тепловых нейтронах с большими размерами активной зоны.

Предложенную ранее модель [4] аналитического описания перекоса полей нейтронов и плотности энергораспределения можно рассматривать как решение уравнения диффузии для отклонения потока от первоначального при наличии случайно распределенных возмущений в критическом реакторе. Результаты указанных численных экспериментов удовлетворительно описываются этой моделью [5]. Оказалось, что флюктуации в поле нейтронов определяются следующими характеристиками реактора и возмущений: чувствительностью материального параметра к данному возмущению свойств активной зоны; законом распределения возмущений и, в частности, при гауссовом законе степенью их скоррелированности и средним квадратическим значением возмущения; свойствами отражателя и размерами активной зоны.

В реакторе радиусом R при граничном условии $(\Phi_0'/\Phi_0)|_{r=R} = -\lambda$ дисперсия относительных флюктуаций поля нейтронов согласно работе [4] выражается рядом из произведения радиально-азимутальных гармоник $J_m\left(\mu_m^{(\gamma)} \frac{r}{R}\right) \exp\left[im(\varphi + \varphi_m)\right]$ — собственных функций невозмущенного уравнения (φ_m — случайная фаза i-й гармоники):

$$\left\langle \left[\frac{\delta\Phi(r, \varphi)}{\Phi_0(r, \varphi)} \right]^2 \right\rangle = \left(\frac{\partial \varkappa_0^2}{\partial x} \sigma_x \right)^2 R^2 \int\limits_{S_{\text{а. з}}} \rho(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \times$$

$$\times \sum_{m, \eta, \gamma} a_m^{\eta\gamma}(\lambda R) \frac{J_m\left(\mu_m^{(\eta)} \frac{r}{R}\right) J_m\left(\mu_m^{(\gamma)} \frac{r}{R}\right)}{\left[J_0\left(\mu_0^{(1)} \frac{r}{R}\right) \right]^2}. \quad (1)$$

Здесь $\delta\Phi(r, \varphi)$ — отклонение поля нейтронов в точке с координатами (r, φ) относительно невозмущенного поля $\Phi_0(r, \varphi)$; $(\partial\varkappa_0^2/\partial x)\,\sigma_x$ — изменение материального параметра при отклонении свойства активной зоны x (макросечения какого-либо процесса, обогащения, плотности, температуры и др.) от первоначального на значение среднего квадратического возмущения σ_x (вычисляется, например, по двухгрупповому уравнению критичности); $\rho(\mathbf{r})$ — нормированная автокорреляционная функция для возмущений, при отсутствии корреляции возмущений между разными ТВС $\rho(\mathbf{r})$ имеет П-образный в пределах одной ТВС вид и интеграл от нее равен площади ТВС в плане активной зоны; $J_0\left(\mu_0^{(1)} \frac{r}{R}\right) = \Phi_0(r, \varphi$ — функция распределения невозмущенного поля нейтронов; $a_m^{\eta\gamma}(\lambda R)$ — зависящие от альбедо отражателя доли вклада произведений гармоник в дисперсию поля.

С целью интерпретации полученного результата рассмотрим случайную функцию координат $\delta\Phi(\mathbf{r})$, которая является суммой радиально-азимутальных гармоник $f_n(\mathbf{r})$ со случайными амплитудами z_n

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \sqrt{A} \sum_n z_n f_n(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Дисперсия этой функции в относительных единицах при гауссовом распределении случайных величин z_n с дисперсией σ_n^2 равна

$$\left\langle \left[\frac{\delta\Phi(\mathbf{r})}{f_0(\mathbf{r})} \right]^2 \right\rangle = A \sum_{n, l} k_{nl} \sigma_n \sigma_l \frac{f_n(\mathbf{r}) f_l(\mathbf{r})}{[f_0(\mathbf{r})]^2}, \quad (3)$$

где k_{nl} — коэффициент корреляции между z_n и z_l. Сравнение формул (1) и (3) позволяет установить, что $a_m^{\eta\eta} = \sigma_{m\eta}^2$ и некоторые другие соответствия.

В таблице приведены результаты расчета средних квадратических значений амплитуд и коэффициенты корреляции между амплитудами различных гармоник. Следует отметить: