12. Semashko N., Kuznetsov V., Krylov A. In: Proc. of the Symp. on Productions and Neutrae Negative Hydrogen Ions and Beams. Report BNL-50727, 1977, p. 170.
13. Дьячков Б. А. и др. «Приборы и техника эксперимента», 1978, № 5, с. 37.
14. Крылов А. И., Кузнецов В. В., Семашко Н. Н. «Атомная энергия», 1980, т. 48, вып. 3, с. 186.
15. Hooper E. e.a. [12], p. 163.

Поступила в Редакцию 06.03.80

УДК 621.384.64

Ускорение частиц в неоднородном по поперечному сечению ВЧ-поле

БОНДАРЕВ Б. И., ДУРКИН А. П.

Одним из наиболее простых способов повышения тока в линейном ускорителе ионов является увеличение размера апертуры. Этот способ можно реализовать, например, при использовании для фокусировки частиц сверхпроводящих соленоидов [1]. Для выяснения возможности ускорения частиц в канале линейного ускорителя с достаточно большой апертурой необходимо исследовать, как влияет неоднородное по поперечному сечению ускоряющее поле E_z на продольное движение частиц. Увеличение радиуса апертуры приводит к появлению двух основных эффектов: изменению эффективности ускорения частиц и возмущению продольных колебаний.

Рассмотрим два случая, когда фаза синхронной частицы за период ускорения изменяется на 2π и на π. В первом случае поле на границе апертуры можно представить в виде

$$E(z, R)=\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \omega n z,$$

где $\omega = 2\pi/L$; L — период разложения; R — радиус апертуры. Поле внутри апертуры определяется выражением

$$E(z, r)=E_0 J_0(2\pi r/\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{I_0(2\pi T_n r/\lambda)}{I_0(2\pi T_n R/\lambda)} \cos \omega n z.$$

Здесь $T_n = \sqrt{(n\lambda/L)^2-1}$; λ — длина волны; J_0, I_0 — известные функции Бесселя. При $n\lambda \gg L$ имеем $T_n \approx n\lambda/L$ и $(2\pi/\lambda)T_n = \omega n$.

Во втором случае поле на границе апертуры имеет вид

$$E(z, R)=\sum_{h=0}^{\infty} E_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{L},$$

где $L = \beta\lambda/2$ — длина периода ускорения ($\beta = v/c$, v — скорость частицы, c — скорость света). Поле внутри апертуры определяется как

$$E(z, r)=\sum_{h=0}^{\infty} E_{2k+1} \frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{L}\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi R}{L}\right]} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{L}. \tag{1}$$

Приведенные выражения показывают, что в первом случае с увеличением радиуса апертуры поле на оси ускорителя стремится к постоянному значению, трубки все хуже экранируют и уменьшается коэффициент пролетного времени T. Во втором случае при приближении к оси уменьшается само поле, что также приводит к ухудшению эффективности ускорения. Результаты дальнейшего исследования справедливы в обоих случаях, но для определенности при изложении будем ориентироваться на второй.

Рассмотрим продольные колебания частиц в неоднородном поле. Если e — заряд частицы, то сила, действующая на частицу, изменяется по закону $F = eE(z, r)\cos(\omega t + \varphi)$. Как известно из работы [2], приближенно можно считать, что на каждом периоде вклад в ускорение дает одна бегущая гармоника с амплитудой E_m и приращение энергии ΔW_s синхронной частицы на периоде ускорения определяется из соотношения

$$\Delta W_s = eE_m L \cos\varphi_s.$$

Поскольку частицы имеют различные поперечные траектории, распределения поля $\widetilde{E}(z) = E[z, r(z)]$, действующего на частицу в разных периодах ускорения, различаются между собой. Но так как по-прежнему на каждом периоде вклад в ускорение дает только одна гармоника, для периода с номером n справедливо соотношение

$$\Delta W_s = eE_{mn} L_n \cos\varphi_{sn}.$$

Изменение E_{mn} от периода к периоду влечет изменение синхронной фазы, т. е. на каждом периоде появляется своя частица, изменяющая фазу при пролете периода на π. Эту частицу можно рассматривать как центр колебаний для данного периода ускорения.

Таким образом, $eE_{mn}L_n \cos\varphi_{sn} = \Delta W_{nR}$, где $\Delta W_{nR} = eE_{mR}L_n \cos\varphi_{sR}$ — набор энергии на n-м периоде ускорения расчетной синхронной частицы, движущейся в однородном поле.

Для определения φ_{sn} получаем соотношение

$$E_{mR}\cos\varphi_{sR} = E_{mn}\cos\varphi_{sn}. \tag{2}$$

В случае, когда из соотношения (2) следует, что $\cos\varphi_{sn} > 1$, синхронная частица для данного периода отсутствует. Если таких периодов достаточно много, то существует опасность развала сгустка.

Перейдем к математическому описанию задачи. Рассмотрим сечение шестимерного фазового портрета пучка, состоящее из точек, имеющих в начале ускорителя одинаковые координаты x_0, $\dot{x}_0$, y_0, $\dot{y}_0$ в поперечном фазовом пространстве. На каждом периоде ускорения эти частицы совершают колебания относительно синхронной частицы, но в соответствии с приведенными выше рассуждениями центр колебаний и их частота меняются от периода к периоду. Координаты β_{sn} — центров колебаний — совпадают с β_s для расчетной синхронной частицы, значения φ_{sn} в соседних периодах различаются.

Заметим следующие изменения в уравнении движения:

1) E_m — кусочно-постоянная функция, меняющая свое значение при переходе к следующему периоду ускорения;

2) появляется кусочно-постоянная функция χ, описывающая изменение положения центра колебаний. На периоде с номером k имеем $\chi(k) = \varphi_{sk} - \varphi_{sk-1}$. Можно считать, что E_m и χ изменяются периодически с удвоенной частотой поперечных колебаний $\mu = 2\mu_п$. Проекция шестимерного фазового портрета на фазовую плоскость продольных координаты и скорости будет ограничена кривой, описанной вокруг фазовых картинок для всех сечений.

Очевидно, что амплитуды изменения $E_m(k)$ и $\chi(k)$ для частиц из любого сечения определяются отклонением их синхронной фазы $\varphi_s(k)$ от расчетного значения φ_{sR}. Простой анализ соотношения (2) показывает, что изменение синхронной фазы тем меньше, чем больше значение φ_{sR}. Отсюда следует, что ускорение частиц в канале с большой апертурой принципиально возможно, если в той части ускорителя, где наблюдается сильная неоднородность ускоряющего поля по поперечному сечению, увеличить синхронную фазу, уменьшив тем самым темп ускорения. Соотношение (2) показывает, что область продольного захвата тем меньше, чем ближе область поперечных колебаний частиц, соответствующих данному сечению, к оси ускорителя. Наибольший захват соответствует частицам, область поперечных колебаний которых близка к границе апертуры, наименьший — частицам, движущимся вдоль оси ускорителя.

Для частиц, движущихся на постоянном расстоянии r от оси ускорителя, постоянные значения E_{mr} и φ_{sr} определяются из выражений (1) и (2). Если частицы совершают поперечные колебания на отрезке $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то при отсутствии параметрического резонанса ($|2\nu - \mu| \gg 0$, где ν и μ — частоты продольных и поперечных колебаний) их движение вдоль оси ускорителя можно описать с помощью значения $\bar{E}_{mr}$, усредненного по периоду поперечных колебаний. При этом $E_{mr_1} < \bar{E}_{mr} < E_{mr_2}$. Таким образом, область захвата для сечения с любыми начальными поперечными координатами и скоростями будет содержать в себе область захвата для осевых частиц. Поэтому, чтобы избежать потерь частиц, необходимо сгруппировать пучок перед входом в ускоряющий канал таким образом, чтобы он вписывался в область захвата для осевых частиц. В этом случае фазовая ширина всего пучка будет определяться размером области, которую занимает в процессе колебаний исходный фазовый портрет при значениях E_m и φ_s, соответствующих границе пучка.

Для оценки влияния неоднородности поля на изменение фазового объема рассмотрим случай малых колебаний.

Уравнение малых колебаний для каждого сечения имеет вид

$$(d^2\psi/dr^2) + 2\delta(\tau)(d\psi/d\tau) + \tilde{\nu}^2(\tau)[\psi - \chi(\tau)] = 0. \quad (3)$$

Здесь $\tau = \omega t$; $\psi = \varphi - \varphi_s(k)$; $2\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\ln(\gamma_s^2 p_s \delta_s)$;

$$\tilde{\nu}(\tau) = \gamma^{-3/2}\,\tilde{\Omega}(\tau)/\omega = \gamma\sqrt{\frac{W_\lambda\,|\operatorname{tg}\varphi_s(k)|}{2\pi\beta_s}};$$

p_s — импульс синхронной частицы; $\gamma = (1-\beta_s^2)^{-1/2}$; W_λ — удельное ускорение.

Общий вид уравнения (3) показывает, что увеличение фазового объема по сравнению с расчетным происходит за счет изменения формы каждого сечения и смещения центра колебаний. Рассмотрим два случая: будем считать, что фазовый портрет в начале ускорителя для всех сечений одинаков и имеет форму эллипса, согласованного с расчетным однородным каналом или с неоднородным каналом для осевых частиц. Для каждого сечения продольное движение будет описываться перемещением исходного эллипса внутри своего согласованного эллипса. Если пучок заполняет всю апертуру, то с учетом приведенных выше соображений можно заключить, что наибольший согласованный эллипс вытянут относительно исходного в $\theta = \sqrt{\operatorname{tg}(\varphi_{sR}/\operatorname{tg}\varphi_{s0}}$ раз в первом случае вдоль оси ψ, во втором — вдоль оси $\dot{\psi}$.

Оценим амплитуду колебаний центра сгустка для каждого сечения. Изменение положения центра пучка описывается уравнением

$$d^2\varphi/d\tau^2 + 2\delta(\tau)(d\psi/d\tau) + \tilde{\nu}^2(\tau)\psi = \tilde{\nu}^2(\tau)\chi(\tau) \quad (4)$$

с начальными условиями $\psi(0) = \Delta\varphi_s$, $\dot{\psi}(0) = 0$, где $\Delta\varphi_s$ — отклонение центра пучка от центра колебаний в начале ускорителя.

Для получения оценки $\psi(\tau)$ можно считать в уравнении (4) $\tilde{\nu}^2(\tau)$ усредненной $\tilde{\nu}^2(\tau) \equiv \bar{\nu}_r^2$. Тогда решение уравнения (4) представляется в виде

$$\psi = \exp\left[-\int_0^\tau \delta(z)\,dz\right]\Delta\varphi_s \cos\bar{\nu}_r\tau + \bar{\nu}_r \times$$
$$\times \exp\left[-\int_0^\tau \delta(z)\,dz\right]\int_0^\tau \exp\left[\int_0^z \delta(z)\,dz\right]\chi(z)\times$$
$$\times \sin\nu_r(\tau - z)\,dz = \psi_1 + \psi_2. \quad (5)$$

Увеличение размера апертуры (R/R_0) и тока (I/I_0) при различных значениях φ_{sR}

φ_{sR}, град	$W_{\lambda R}/W_{\lambda 0}$	R/R_0	I/I_0
−37	1	1	1
−75	3,1	3	9
−80	4,8	3,5	12,5
−85	9	4,8	23
−88	23	6,5	42

Используя медленность показательных функций в выражении для ψ_2, можно получить

$$\psi_2(N) = 2\sin\frac{\bar{\nu}_r}{2}\sum_{k=1}^{N}\chi(k)\sin\bar{\nu}_r\left(N-k-\frac{1}{2}\right),$$

где N — текущий номер периода ускорения; $\chi(k) = \varphi_s(k) - \varphi_s(k-1)$. Если считать, что зависимость $\varphi_s(k)$ определяется первой гармоникой $\varphi_s(k) = \varphi_0 + \varphi_1\sin(\mu k + \varphi_2)$, то получаем $\chi(k) = 2\sin(\mu/2)\,\varphi_1\cos[\mu(k+1/2)+\varphi_2]$. Величина $\psi_2(N)$ есть сумма колебаний с частотами $\mu + \bar{\nu}_r$ и $\mu - \bar{\nu}_r$, ее максимальное по N значение оценивается с помощью соотношения

$$|\psi_{2\text{макс}}| \leqslant \Delta = 2\bar{\nu}_r\mu^2\varphi_1/(\mu^2 - \bar{\nu}_r^2) \qquad (6)$$

(заменяем $\sin\bar{\nu}_r/2 = \bar{\nu}_r/2$ и $\sin\mu/2 = \mu/2$).

Если частицы совершают поперечные колебания на отрезке $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то приближенно можно принять $\varphi_1 = |\varphi_{sr_2} - \varphi_{sr_1}|/2$, где φ_{sr_2}, φ_{sr_1} — значения синхронной фазы для поля на расстоянии соответственно r_2 и r_1 от оси. (Ясно, что $\psi_2 = 0$ при $r_2 = r_1$.)

Колебания центра пучка состоят из двух компонентов: ψ_1 — колебаний, связанных со сдвигом центра пучка относительно центра колебаний в начале ускорителя, и ψ_2 — колебаний, связанных с изменением положения центра колебаний от периода к периоду. Заметим, что при $\mu^2 \gg \bar{\nu}_r^2$ $\Delta = \bar{\nu}_r\Delta\varphi_r$, причем $\bar{\nu}_r \leqslant (\nu_R + \nu_0)/2$; $\Delta\varphi_r < |\varphi_{sR} - \varphi_{s0}|/2$. Поскольку для обеспечения устойчивости ускорения необходимо выбирать большие значения синхронной фазы, значение Δ мало по сравнению с шириной области захвата. Так как наибольшую область захвата имеют граничные частицы, а наименьшую — осевые, то из соотношений (5) и (6) следует, что наиболее выгодным является второй вариант, когда центр сгустка в начале ускорения совмещен с центром колебаний для осевых частиц.

Таким образом, для обеспечения устойчивости ускорения частиц в канале с сильной неоднородностью ВЧ-поля по поперечному сечению необходимо снизить темп ускорения, увеличив синхронную фазу. Для уменьшения потерь частиц нужно сформировать сгусток на входе ускоряющего канала, учитывая условия ускорения, складывающиеся для осевых частиц. По мере увеличения энергии частиц неоднородность поля уменьшается и становится возможным повысить темп ускорения, доведя синхронную фазу до обычных значений. В таблице показана связь между значениями φ_{sR} на границе апертуры и допустимым увеличением радиуса апертуры R и тока пучка I. Все значения определены при условии, что фаза синхронной частицы на оси ускорителя $\varphi_{s0} = -37°$.

В качестве возможного варианта начальной части ускорителя рассмотрим ускоряющую структуру типа Н-резонатора, заключенную в сверхпроводящий соленоид. Пусть $\lambda = 1{,}5$ м, начальная энергия частиц $W = 0{,}75$ МэВ ($\beta = 0{,}04$), напряженность поля на границе апертуры $E = 150$ кВ/см. Для обеспечения достаточной однородности поля в таком ускорителе обычно выбирают диаметр апертуры, равный $2R \approx 1$ см. Выберем диаметр апертуры 3 см, тогда среднее поле на оси оказывается примерно в 3 раза меньше, чем на границе апертуры. Выберем значение синхронной фазы $\varphi_{sR} = -75°$, тогда на оси $\varphi_{s0} = -37°$. Угол пролета зазора будем считать равным 100°.

Приближенный расчет показывает, что при $W \approx 30$ МэВ ($\beta = 0{,}245$) поле становится практически однородным, и последующий участок ускорителя с большой апертурой ничем не будет отличаться от такого же участка ускорителя с обычной апертурой. Приближенный расчет ускоряющего канала на участке до энергии $W = 30$ МэВ для ускорителя с большой апертурой выполним, учитывая, что синхронная фаза на границе апертуры плавно изменяется таким образом, что для любого периода ускорения синхронная фаза на оси остается неизменной ($\varphi_{s0} = -37°$). Тогда длина рассчитываемого участка получается равной 4,5 м, число периодов ускорения 46. Для ускорителя с однородным полем $L \approx 3{,}6$ м и $N \approx 34$. Таким образом, увеличение тока в ускорителе в 9 раз сопровождается увеличением его длины на 25% по сравнению с обычным вариантом.

Авторы выражают благодарность С. К. Есину за сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мурин Б. П. и др.** «Линейные ускорители ионов». М., Атомиздат, 1978.
2. **Капчинский И. М.** Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.

Поступила в Редакцию 4.04.80