Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 6(9), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей

С.С.Гиргель

[1] 246699, Беларусь, Гомель, Гомельский государственный университет

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

В последнее время большое внимание исследователей привлекают, часто называемые бездифракционными, бесселевы световые пучки, у которых поперечное распределение амплитуды поля описывается функциями Бесселя первого рода. Впервые Дурнин и другие [1, 2] обратили внимание на то, что существуют точные решения скалярного волнового уравнения Гельмгольца, характеризующие новый тип световых пучков. Поперечное распределение амплитуды таких пучков описывается не функцией Гаусса, а функциями Бесселя 1-го рода. Такие пучки были названы бесселевыми или бездифракционными, и начались их интенсивные теоретические и экспериментальные исследования [3–10]. Изучение векторных свойств бесселевых пучков на основе строгого решения уравнения Максвелла проводилось в [5–7]. Было показано, что решение векторного, а не скалярного уравнения Гельмгольца приводит к тому что, вообще говоря, моды бесселевых пучков света имеют продольную составляющую. Получен ряд решений для TE, TM мод, для плоско поляризованных мод и обсуждаются их свойства. Вместе с тем, в этих работах найдены только отдельные решения из многих, характеризующих возможные типы мод бездифракционных полей. Здесь мы получим строгие решения уравнений Максвелла и векторного волнового уравнения Гельмгольца, описывающих моды бесселевых пучков различных типов и рассмотрим их энергетические характеристики, следуя нашим работам [9, 10]. Монохроматические световые волны в изотропных средах, характеризуемых уравнениями связи

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E}, \bar{B} = \mu\bar{H}, \tag{1}$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} rot\bar{E} = ik_0\mu\bar{H}, div\mu\bar{H} = 0; \\ rot\bar{H} = ik_0\mu\bar{E}, div\varepsilon\bar{E} = 0. \end{cases} \qquad (2), (2a)$$

При заменах

$$\bar{E} \rightleftarrows \bar{H}, \varepsilon \rightleftarrows -\mu, \bar{B} \rightleftarrows -\bar{D} \tag{3}$$

уравнения Максвелла (2), (2а) вместе с материальными уравнениями (1) преобразуются сами в себя. Поэтому соотношения (3) фактически представляют собой принцип взаимности. Он позволяет, на основе выражений для вектора поляризации $\bar{E}$, сразу записывать аналогичные выражения для вектора магнитного поля $\bar{H}$ световой волны.

Из (2), (2а) вытекает волновое уравнение (векторное уравнение Гельмгольца)

$$\left(\Delta + k^2\right)\bar{E}\left(r\right) = 0, \tag{4}$$

которое вместе с уравнением непрерывности

$$div\overline{E} = 0 \tag{5}$$

полностью определяет векторное поле $\bar{E}$. Здесь $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu / c^2$.

Для бесселевых полей вида

$$\bar{E}\left(\bar{r}\right) = \bar{E}\left(\bar{r}_{\perp}\right) exp\left(ik_{II}z\right) \tag{6}$$

уравнение Гельмгольца приобретает вид

$$\left(\bar{\nabla}_{\perp}^{2} + k_{\perp}^{2}\right) \bar{E}\left(\bar{r}_{\perp}\right) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\bar{k}_{II}$ и $\bar{k}_{\perp}$ — продольная и поперечная компоненты волнового вектора поля $\left(\bar{k} = \bar{k}_{II} + \bar{k}_{\perp}\right)$.

Так как уравнение (7) справедливо для одной z - компоненты поля $\bar{E}$, то оно должно также выполнятся для поперечных компонент поля $\bar{E}_{\perp}$:

$$\left(\bar{\nabla}_{\perp}^{2} + k_{\perp}^{2}\right) \bar{E}\left(\bar{r}_{\perp}\right) = 0. \tag{8}$$

Если использовать цилиндрическую систему координат и перейти к циркулярным компонентам

$$C_{\pm}\left(\rho, \varphi\right) = \left(E_{\rho} \pm iE_{\varphi}\right)/\sqrt{2} = \left(E_{x} \pm iE_{y}\right) e^{\mp i\varphi}/\sqrt{2}, \tag{9}$$

то система (8) двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка распадается на два независимых уравнения

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + 1 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \pm i\right)^2\right\} C_{\pm} = 0. \tag{10}$$

Последние уравнения имеют решения в виде

$$C_{\pm}(\rho, \varphi) = C_{\pm}(\rho)\, exp(i(m \mp 1)\varphi), \tag{11}$$

Здесь $J_m\left(u\right)$ - функции Бесселя первого рода порядка m, $u = k_{\perp}\rho$. Учитывая (9) возвращаемся к компонентам E_{ρ} и E_{φ}:

$$\bar{E}_{\perp} = \bar{e}_x J_m\left(u\right) \exp\left(im\varphi\right). \tag{12}$$

Здесь принято во внимание, что $\bar{e}_x = \cos\varphi \bar{e}_{\rho} - \sin\varphi \bar{e}_{\varphi}$.

Продольную компоненту поля E_z найдем из уравнения непрерывности (5). Тогда полный вектор поля

$$\bar{E} = \left[J_m \bar{e}_x + i\bar{e}_z \frac{k_{\perp}}{2k_{II}}\left(e^{-i\varphi} J_{m-1} - e^{-i\varphi} J_{m+1}\right)\right] e^{im\varphi} \tag{13}$$

Таким образом, здесь поперечная компонента вектора $\bar{E}$ поляризована линейно вдоль оси ОХ.

Выполняя замену $\varphi \rightarrow \varphi - \pi/2$ получаем моду, для которой поперечная составляющая линейно поляризована вдоль ОУ

$$\bar{E} = \left[J_m \bar{e}_y - \bar{e}_z \frac{k_{\perp}}{2k_{II}}\left(e^{-i\varphi} J_{m-1} + e^{i\varphi} J_{m+1}\right)\right] e^{im\varphi}. \tag{14}$$

Умножая (14) на $(\pm i)$ и складывая с (13) получаем выражения

$$\bar{E} = \left[J_m\left(\bar{e}_z \pm i\bar{e}_y\right) \mp \bar{e}_z \frac{k_{\perp}}{k_{II}} J_{m+1} e^{\pm i\varphi}\right] e^{im\varphi}, \tag{15}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

описывающие циркулярно поляризованные моды. Последние выражения (15), как наиболее простые, взять в качестве базовых и любые решения уравнения Гельмгольца (7) выражать как суперпозицию решений типа (15). Например, эллиптически поляризованные моды также являются суперпозицией решений (15).

В цилиндрическом базисе формулы (15) имеют форму

$$\bar{E} = \left[J_m \left(\bar{e}_\rho \pm i\bar{e}_\varphi \right) \mp \bar{e}_z \frac{ik_\perp}{k} J_{m+1} e_z \right] \exp\left(i \left(m \pm 1 \right) \varphi \right). \tag{16}$$

Отсюда следует, что бесселевы моды, не зависящие от азимутального угла φ, имеют вид

$$\bar{E} = \left[J_1 \bar{e}_\rho \pm i J_1 \bar{e}_\varphi + \frac{ik_\perp}{k} J_0 e_z \right] \tag{17}$$

Бесселевы поля, не имеющие нормальной составляющей E_z (ТЕ-моды), описываются выражениями

$$\bar{E}_{TE} = \left[iJ'_m \bar{e}_\varphi + \frac{m}{u} J_m \bar{e}_\rho \right] \exp\left(im\varphi \right) = \frac{1}{2} \left[\left(J_{m+1} + J_{m-1} \right) \bar{e}_\rho + i \left(J_{m-1} - J_{m+1} \right) \bar{e}_\varphi \right] \exp\left(im\varphi \right) \tag{18}$$

Из уравнений Максвелла (2) получаем компоненты вектора магнитного поля $\bar{H}$:

$$\bar{H}_{TE} = \frac{k_{II}}{k_0 \mu} \left(\frac{m}{u} J_m \bar{e}_\varphi - iJ'_m \bar{e}_\rho - J_m \bar{e}_z \right) \exp\left(im\varphi \right). \tag{19}$$

Здесь штрих $'$ означает производную по u

Видим, что ТЕ-мод

$$\bar{E}_\rho II \bar{H}_\varphi, \bar{E}_\varphi II \bar{H}_\rho \tag{20}$$

При m = 0 получаем $E_z = E_\rho = H_\varphi = 0, E_\varphi = iJ'_0$. Это — так называемый, азимутально поляризованный пучок Бесселя.

Зная векторы поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$, можно рассчитать энергетические характеристики поля. Можно показать [9, 10], что для ТЕ-моды плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\mu}{16\pi} \left(\frac{k^2 + k_{II}^2}{k_\perp^2} \left(J'^2_m + \frac{m^2}{u^2} J_m^2 \right) + J'^2_m \right). \tag{21}$$

При этом плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) для ТЕ-мод равен [10]

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi k_0 \mu} \left\{ k_\parallel \left(J'^2_m + \frac{m^2}{u^2} J_m^2 \right) \bar{e}_z + \frac{k_\perp m}{u} J_m^2 \bar{e}_\varphi \right\}. \tag{22}$$

Таким образом: а) для ТЕ-мод поперечные составляющие векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ взаимно ортогональны; б) нет радиальной составляющей вектора потока энергии.

Для циркулярных мод (15) вектор магнитного $\bar{H}$ выражается из (2). Отсюда вытекают энергетические характеристики поля. Например, плотность потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi k_0 \mu k_{II}} \left[\frac{k_\perp}{k_{II}} J_{m+1} \left(\left(k^2 + k_{II}^2 \right) J_m \mp k_{II}^2 J_{m+1} \right) \bar{e}_\varphi + \left(k_{II}^2 + k^2 \right) J_m^2 \bar{e}_z \right] \tag{23}$$

Таким образом, для циркулярных бесселевых мод, как и для ТЕ-мод, поток энергии $\bar{S}$ не имеет радиальной составляющей.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

Аналогично получаются выражения для вектора $\bar{H}$ и энергетические характеристики для других типов мод, но из-за громоздкости они здесь не приведены.

Заключение

В настоящей работе получены новые строгие решения уравнений Максвелла и векторного волнового уравнения Гельмгольца, описывающие новые типы мод бесселевых электромагнитных полей в однородных изотропных средах. Показано, что семейство решений является многопараметрическим и поэтому существует произвол в выборе основных типов мод.

Найдены поляризационные характеристики различных типов бесселевых волновых полей (для ТЕ-мод, для линейно-, циркулярно- и эллиптически поляризованных мод). Установлены основные закономерности ТЕ мод. Обоснован принцип взаимности, позволяющий осуществлять переход от Е-мод к Н-модам и обратно.

Выявлены взаимосвязи между различными модами бездифракционных полей в декартовой и цилиндрической системах координат. Рассчитаны энергетические характеристики и получены выражения для средней плотности энергии и вектора Пойнтинга различных типов бесселевых волновых полей последних.

Найденные результаты могут быть использованы при описании взаимных преобразований бесселевых световых полей различных типов.

Литература

[1] J.Durnin, *Exact solutions for nondiffracting beams,* I. The scalar theory// J.Opt. Soc.Am.A.- 1987.- Vol.4, № 4.- P. 651-654.

[2] J.Durnin and J., Jr.Miceli *Diffraction - free beams* // Phys. Rev. Lett.- 1987, Vol.58, № 15.- P.1492-1501.

[3] G.Indebetouw, *Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis* // J.Opt. Soc.Am. A.- 1989.- Vol.6, № 1.- P.150-152.

[4] R.M.Herman and T.A.Wiggins, *Production and uses of difractionless beams* // JOSA.A- 1991.- Vol.8., № 6.- P. 933-972.

[5] A.M.Бельский, *Компоненты векторов поля и потоки энергии бездифракционных электромагнитных пучков* // Вестник БГУ. Сер.1.- 1995, № 2.- С.8-10.

[6] S.R.Mishra, *A vector wave analysis of a Bessel beam* // Optics Communs.- 1991. Vol.85.- № 2,3.- P.159-161.

[7] K.Shimoda, *Exact solutions of field vectors of diffraction free electromagnetic waves* // Journ. Phys. Soc. Japan.- 1991.- Vol.60, № 2.- P.450-454.

[8] S.R.Seshadri, *Electromagnetic Gaussian beam* // JOSA. A.- 1998. Vol.15. № 22.- P.2112-2779.

[9] S.S.Girgel', S.N.Kurilkina, *Vectorial properting of Bessel light beams* // Intrernational scientific conference. Optics of Crystals. Abstract. Belarus, 2000.- P. 47-48.

[10] S.S.Girgel, S.N.Kurilkina, *Vectorial of Bessel light beams* // Proc. SPIE.- 2001, V.4358.- P.258-264.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины