Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 6(9), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света

С.С.Гиргель

[1] 246699, Беларусь, Гомель, Гомельский государственный университет

В настоящее время активно проводятся исследования волновых электромагнитных полей с бесселевым поперечным профилем [1–9]. Такие поля, в определенном смысле, являются бездифракционными и обладают целым рядом интересных свойств. В реальности. всякие световые пучки являются ограниченными в пространстве. Поэтому для бездифракционных световых пучков более реалистической, хотя и более сложной моделью является модель бессель- гауссового светового пучка, у которого поперечное распределение амплитуды поля описывается произведением функций Бесселя первого рода на функцию Гаусса [10–15]. В данной работе получим общие векторные решения уравнений Максвелла и векторного волнового уравнения Гельмгольца, описывающие поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света. Уравнения Максвелла для монохроматических волн вида

$$\bar{E}\left(\bar{r},t\right)=\bar{E}\left(\bar{r}\right)e^{-iwt} \tag{1}$$

в средах, описываемых линейными материальными уравнениями связи

$$\bar{D}=\varepsilon\bar{E},\bar{B}=\mu\bar{H}, \tag{2}$$

принимают форму

$$\begin{cases} rot\bar{E}=ik_0\mu\bar{H}, div\mu\bar{H}=0; \\ rot\bar{H}=ik_0\mu\bar{E}, div\varepsilon\bar{H}=0: \end{cases} \qquad (3),(4)$$

Для однородных изотропных сред отсюда вытекает волновое уравнение (векторное уравнение Гельмгольца)

$$\left(\Delta+k^2\right)\bar{E}\left(r\right)=0. \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon\mu\omega^2/c^2=\bar{k}^2\ k_0=w/c$. Уравнение (5) вместе с уравнением непрерывности

$$div\overline{E}=0 \tag{6}$$

полностью определяет векторное поле $\overline{E}$.

Для световых пучков будем искать решения (6) в виде

$$\bar{E}\left(\bar{r}\right)=\bar{A}\left(\bar{r}\right)exp\left(ikz\right). \tag{7}$$

Отсюда получаем два независимых уравнения

$$\left(\bar{\nabla}^2+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{A}_\perp\left(\bar{r}\right)=0;\left(\bar{\nabla}^2+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z\left(\bar{r}\right)=0. \qquad (8),(8в)$$

Найдем сначала поперечные компоненты $\bar{A}_\perp$ векторного уравнения (8а). В цилиндрической системе координат векторное уравнение (8а) эквивалентно двум связанным дифференциальным уравнениям

$$\Delta A_\rho-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{A_\rho}{\rho^2}+2ik\frac{\partial A_\rho}{\partial z}=0; \tag{9a}$$

$$\Delta A_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + 2ik\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0. \tag{9в}$$

Для разделения переменных перейдем к циркулярным компонентам

$$C_\pm = A_\rho \pm iA_\varphi. \tag{10}$$

Тогда уравнения (9а) и (9в) сводятся к

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + 2ik\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\right)\right] C_\pm = 0. \tag{11}$$

Здесь, для ограниченных пучков, как обычно, используется параболическое приближение, т.е. пренебрегается второй производной по z от амплитуд $C_\pm$. Естественно искать решения уравнений (11) для бессель-гауссовых пучков в виде произведения функции Гаусса $G(\rho, z)$ нулевой моды (гауссиана)

$$G(\rho, z) = \frac{L}{L + iZ} \cdot \exp\left(\frac{-k\rho^2}{2(L + iz)}\right) \tag{12}$$

и некоторых функций $\varepsilon_\pm(\rho, \varphi, z)$, описывающих поперечное распределение амплитуд функциями Бесселя первого рода, т.е.

$$C_\pm(\rho, \varphi, z) = G(\rho, z)\,\varepsilon_\pm(\rho, \varphi, z) \tag{13}$$

Учитывая, что гауссиан $G(\rho, z)$ удовлетворяет параболическому уравнению, находим, что функции $\varepsilon_\pm(\rho, \varphi, z)$ должны являться решениями уравнений

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{2\rho k}{L + iz}\frac{\partial}{\partial\rho} + 2ik\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\right)^2\right] \varepsilon_\pm = 0. \tag{14}$$

Будем искать решения (14) в виде

$$\varepsilon_\pm(\rho, \varphi, z) = \varepsilon(\rho, z)\exp\left(i(m \mp 1)\varphi\right) Q(z), \tag{15}$$

где функции $\varepsilon(\rho, z)$ и $Q(z)$ имеют следующую [14] зависимость от ρ и z:

$$\varepsilon(\rho, z) = \varepsilon\left(\frac{k_\perp L\rho}{L + iz}\right); Q(z) = \exp\left(\frac{-ik_\perp^2 zL}{2k(L + iz)}\right) \tag{16}$$

Тогда для функций $\varepsilon(\rho, z)$ получаем классические уравнения Бесселя

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{k_\perp^2 L^2}{(L + iz)^2} - \frac{m^2}{\rho^2}\right] \varepsilon(\rho, z) = 0, \tag{17}$$

имеющие решения в виде функций Бесселя первого рода порядка m

$$\varepsilon(\rho, z) = J_m\left(\frac{k_\perp L\rho}{L + iz}\right). \tag{18}$$

Таким образом, общие решения для компонент $\varepsilon(\rho, \varphi, z)$ имеют вид

$$\varepsilon(\rho, \varphi, z) = J_m(\rho, z)\exp\left(i(m \mp 1)\varphi\right) Q(z), \tag{19}$$

где, для краткости, введен безразмерный параметр u_1:

$$u_1 = \frac{u}{1 + iz/L}, u = k_\perp \rho, \tag{20}$$

Учитывая (10) и (13), возвращаемся к цилиндрическим компонентам поля E_ρ и E_φ:

$$\bar{E}_\perp(\bar{r}) = G(\rho, z) \cdot Q(z) \left[\cos\varphi \bar{e}_\rho - \sin\varphi \bar{e}_\rho\right] J_m(u_1) \exp(im\varphi) \tag{21}$$

Так как

$$\cos\varphi \bar{e}_\rho - \sin\varphi \bar{e}_\varphi = \bar{e}_x, \tag{22}$$

то выражение (21) в декартовой системе координат описывает поперечные моды Бесселя-Гаусса, линейно поляризованные вдоль оси ОХ:

$$\bar{E}_\perp(\bar{r}) = \bar{e}_x G(\rho, z) \cdot Q(z) J_m(u_1) \exp(im\varphi). \tag{23}$$

Выполнив замену $\varphi \to \varphi - \pi/2$ в (21), получим также линейно поляризованные моды вдоль оси ОУ:

$$\bar{E}_\perp(\bar{r}) = \bar{e}_y G(\rho, z) Q(z) J_m(u_1) \exp(im\varphi). \tag{24}$$

Отсюда вытекают выражения для поперечных эллиптически поляризованных мод

$$\bar{E}_\perp(\bar{r}) = G(\rho, z) \cdot Q(z) J_m(u_1) (\bar{e}_x \pm i\rho \bar{e}_y) \exp(im\varphi) \tag{25}$$

Здесь р - эллиптичность ($p \leq 1$)

Последние выражения (23)-(25) для компонент вектора $\bar{E}$ пучков Бесселя-Гаусса являются достаточно общими и в то же время наиболее простыми. Поэтому эти выражения можно взять в качестве базовых для вычисления мод других типов и установления взаимосвязей между ними. При циркулярной поляризации р = 1, а при линейной - р = 0. Из (25) видно, что наиболее сильная азимутальная зависимость проявляется для линейной поляризации вектора $\bar{E}$, для циркулярных мод она исчезает. Аналогично, можно показать, что уравнение (5) также имеет решение для E_z компонент световых пучков вида

$$\bar{E}_z(\bar{r}) = \bar{e}_z G(\rho, z) Q(z) J_m(u_1) \exp(im\varphi). \tag{26}$$

Общие решения уравнения Гельмгольца (5) для бессель-гауссовых пучков света являются суперпозицией различных мод, отличающихся индексами m, поляризацией и амплитудой. Существует только иметь в виду, что компоненты поля $\bar{E}$ не могут быть произвольными, а должны удовлетворять уравнению непрерывности (6). Поэтому можно взять поперечные компоненты поля $\bar{E}_\perp$, например, в виде (25), затем продольную компоненту E_z проще всего найти из (6). Тогда имеем

$$E_z = i\bar{\nabla}_\perp \bar{A}_\perp e^{ikz}/k. \tag{27}$$

Здесь учтено, что в оптическом диапазоне частот

$$|dE_z/dz| << k|E_z|.$$

Отметим, что несколько решений для поперечных компонент бессель- гауссовых пучков были впервые предложены Холлом и др. [14]. Вместе с тем явные выражения [14] для векторов поляризации бесселя-гауссовых световых пучков представлены в излишне сложной форме и обладают поэтому сложными азимутальными зависимостями. Холл фактически анализировал только поперечные линейно поляризованные моды. Найденные в настоящей работе выражения (21)-(27) для линейно и эллиптически поляризованных мод являются общими и одновременно более простыми. Кроме того, мы нашли продольные компоненты E_z поля, необходимые, например, для описания расходимости пучка. Векторы поля $\bar{H}$ непосредственно выражаются из уравнений Максвелла (3).

Заключение

В настоящей работе получены общие точные векторные решения уравнений Максвелла и векторного волнового уравнения Гельмгольца, описывающие поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света для различных мод в однородных изотропных средах. Впервые получены полные решения для всех компонент векторов электрического и магнитного полей, включая продольные компоненты.

Установлены поляризационные характеристики различных мод бессель- гауссовых пучков света. Впервые описаны эллиптически поляризованные моды. Показано, что наиболее ярко выражены азимутальные зависимости векторов электромагнитного поля бессель-гауссовых пучков света для линейно- поляризованных мод. Для циркулярных мод азимутальные зависимости векторов поля исчезают и все выражения упрощаются

Найденные результаты могут быть использованы при описании взаимных преобразований бессель-гауссовых световых пучков различных типов.

Литература

[1] J.Durnin, *Exact solutions for nondiffracting beams,* I. The scalar theory// J.Opt. Soc.Am.A.- 1987.- Vol.4, № 4.- P. 651-654.

[2] J.Durnin and J., Jr.Miceli, *Diffraction - free beams* // Phys. Rev. Lett.- 1987, Vol.58, № 15.- P.1492-1501.

[3] G.Indebetouw, *Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis* // J.Opt. Soc.Am. A.- 1989.- Vol.6, № 1.- P.150-152.

[4] R.M.Herman and T.A.Wiggins, *Production and uses of difractionless beams*// JOSA.A- 1991.- Vol.8., № 6.- P. 933-972.

[5] A.M.Бельский, *Компоненты векторов поля и потоки энергии бездифракционных электромагнитных пучков* // Вестник БГУ. Сер.1.- 1995, № 2.- С.8-10.

[6] S.R.Mishra, *A vector wave analysis of a Bessel beam* // Optics Communs.- 1991. Vol.85.- № 2,3.- P.159-161.

[7] K.Shimoda, *Exact solutions of field vectors of diffraction free electromagnetic waves* // Journ. Phys. Soc. Japan.- 1991.- Vol.60, № 2.- P.450-454.

[8] S.S.Girgel', S.N.Kurilkina, *Vectorial properting of Bessel light beams* // Intrernational scientific conference. Optics of Crystals. Abstract. Belarus, 2000.- P. 47-48.

[9] S.S.Girgel, S.N.Kurilkina, *Vectorial of Bessel light beams* // Proc. SPIE.- 2001, V.4358.- P.258-264.

[10] F.Gori, G.Guattari, *Bessel–Gauss beams* // Optics communications.- 1987.- Vol.64. № 6.- P. 481-495.

[11] R.H.Jourdan and D.G.Hall, *Free-space azimuthal paraxial wave equation: the azimuthal Bessel - Gauss beam solution* // Optics Letters.- 1994.- Vol.19, № 7.- P.427-429.

[12] D.G.Hall, *Vector-beam solutions of Maxwell's wave equation* // Optics Letters.- 1996.- Vol.21.- № 21.- P.9-11.

[13] R.H.Jourdan, D.G.Hall, O.King, G.Wick and S.Rishton, *Lasing behavior of circular grating surfase-emitting semiconductor lasers* // JOSA. B.- 1997.- Vol.14.- P.449-453.

[14] P.L.Greene, D.G.Hall, *Properties and diffraction of vector Bessel-Gauss beams* // JOSA.A- 1998. Vol.15. № 12.- P.3020-3027.

[15] S.R.Seshadri, *Electromagnetic Gaussian beam* // JOSA. A.- 1998. Vol.15. № 22. — P.2112-2779.