

УДК 519.3:539.3:624.131

## Компьютерный анализ прогиба перекрытий из многопустотных плит для зданий с широким шагом поперечных несущих стен

В.Е.БЫХОВЦЕВ, Л.А.ЦУРГАНОВА

### Введение

Разработка и внедрение энергоресурсосберегающих технологий в промышленном и гражданском строительстве приводит к постановке ряда оригинальных задач и поиску их решений. Одной из таких задач является расчёт прогиба перекрытий из многопустотных плит. В настоящей работе излагаются методика, алгоритмы и результаты компьютерного моделирования задачи о прогибе многопустотных плит как неоднородных трёхмерных нелинейно-деформируемых объектов.

### Постановка задачи и подходы к её решению

Перекрытие каркаса здания принимается конструктивно состоящим из трёх многопустотных плит марки ПК 57.12-8Ат800Т, объединённых в одной плоскости несущими и связывающими ригелями, (рис. 1). Прогиб перекрытия исследуется в зависимости от способа соединения его конструктивных элементов, расстояния между поперечными несущими стенами и от нагрузки.

В классической теории упругости для расчёта прогиба плиты принимаются следующие предпосылки, гипотезы Кирхгофа [1, 2, 3]:

1. Толщина плиты не изменяется, т.е. деформация  $\varepsilon_z = 0$ ,
2. После изгиба плиты нормаль к её срединной плоскости сохраняется,
3. Точки срединной плоскости по горизонтали не смещаются,
4. Можно не считать деформации и напряжения по оси  $z$ .

Эти предпосылки позволяют решение пространственной задачи свести к двумерной. Результатом решения будет нахождение перемещения узловых точек дискретизованной срединной плоскости рассчитываемой конструкции. Отсюда следует, что расчёт объёмных неоднородных плит по классической методике может рассматриваться только в качестве первого приближения.

### Определение прогиба многопустотной плиты методами линейной теории упругости для трёхмерных тел

Приведенные выше гипотезы Кирхгофа для определения прогиба плит, надо полагать, оправдывают себя в достаточной мере для определенного класса задач. Но для плит сложной структуры, какими являются пустотные плиты, пренебрежение сдвиговыми деформациями в плоскостях  $XOY$  и  $YOZ$  приводит к значительным погрешностям. Кроме того, деформации таких плит имеют нелинейный характер. Всё это в целом приводит к необходимости разработки новых моделей прогиба плит и новых алгоритмов. Решение этой задачи нами проводилось при удовлетворении только первой гипотезы Кирхгофа:  $\varepsilon_z = 0$ . Отсюда следует, что прогиб определяется как функция  $w = f_1(x, y)$ . Отказ от второй гипотезы, т.е. сохранение условий

$$\varepsilon_{yz} \neq 0 \text{ и } \varepsilon_{zx} \neq 0,$$

приводит к тому, что горизонтальные составляющие вектора перемещения не могут быть выражены через прогиб и должны быть представлены как независимые функции координат.

$u = f_2(x, y, z)$  и  $v = f_3(x, y, z)$ . Для функции прогиба  $w$  возникают особые условия: она, в силу принятой гипотезы Киргофа, не зависит от координаты  $Z$  и может зависеть только от координат  $X$  и  $Y$ . Это объясняется тем, что при дискретизации прямоугольными тетраэдрами всегда найдутся два узла, перемещение в которых будет описываться совершенно одинаковыми уравнениями, что недопустимо, ибо приводит к математически неразрешимой задаче по определению функции  $w$ . Этим самым приходим к выводу, что в структуре функции  $w$  должен быть ещё один элемент, не зависящий от координат, а являющийся геометрической характеристикой конечного элемента. Указанным требованиям отвечает зависимость:

$$w_i = \alpha_9 + \alpha_{10}x_i + \alpha_{11}y_i + \alpha_{12}S_i,$$

где  $w_i$  – прогиб в точке  $i$ ,

$S_i$  – площадь грани тетраэдра, противолежащей узлу  $i$ .

Состояние всякого тетраэдра будет определено его физико-механическими характеристиками и приложенными узловыми усилиями [1,3,4]:

$$\{R\}^T = \{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4\}, \quad (1)$$

которым будут соответствовать узловые перемещения

$$\{g\}^T = \{U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U_3, V_3, W_3, U_4, V_4, W_4\}. \quad (2)$$

Для тетраэдра основное уравнение метода конечных элементов имеет вид [5]

$$\{R\} = [K]\{g\}, \quad (3)$$

$$[K] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $V$ ,  $[K]$  – объём и матрица жесткости тетраэдра:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} b_i b_j \rho + (c_i c_j + d_i d_j) G & b_i c_j \lambda + c_i b_j G & d_i b_j^* G \\ c_i b_j \lambda + b_i c_j G & c_i c_j \rho + (b_i b_j + d_i d_j) G & d_i c_j^* G \\ b_i^* d_j G & c_i^* d_j G & (c_i^* c_j^* + b_i^* b_j^*) G \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$i$  – номер узла, связанного с узлами  $j$ :  $i, j=1, 2, 3, 4$ ;  $\rho = 2G + \lambda$ ,

$G, \lambda$  – модуль сдвига и постоянная Ламе,

$b, c, d, b^*, c^*$  – константы, определяемые через координаты узлов тетраэдра [4].

Таким образом, общий вид основного уравнения метода конечных элементов для прогиба плиты как трёхмерного неоднородного по своей структуре тела не изменяется, но содержание матрицы жесткости  $[K]$  будет другим. Построение матрицы жесткости всей системы представляется достаточно простым алгоритмом:

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad [K] = \sum_{l=1}^m [K]^l; \quad \{U\} = \sum_{l=1}^m \{g\}^l; \quad \{F\} = \sum_{l=1}^m \{R\}^l, \quad (6)$$

где  $m$  – количество конечных элементов дискретизованной области.

Учет нелинейной деформируемости плиты производился методом энергетической линеаризации [5].

### Компьютерное моделирование прогиба перекрытий из многопустотных плит для зданий с широким шагом поперечных несущих стен

Наиболее эффективным методом исследования прогиба перекрытия является метод конечных элементов. Дискретизацию плиты производим объёмными конечными элементами. Для решения задачи были рассмотрены модельные задачи, которые характеризовались длиной плит и связями между конструктивными элементами, (рис. 1).

Исследовались следующие варианты связей:

- плиты и связевые ригеля вдоль их длин между собой не соединены,
- плиты между собой вдоль их длин соединены,
- плиты и связевые ригеля вдоль их длин между собой соединены.

Длина плит принималась равной 570, 720 и 870 сантиметров, ширина не изменялась. Исходные физико-механические характеристики плит для всех модельных задач одинаковы: модуль упругости для ригелей  $E=30 \cdot 10^3$  МПа, для плит  $E=20 \cdot 10^3$  МПа, для замоноличенных швов  $E=16 \cdot 10^3$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu=0.2$ . Перекрытие имеет шарнирное закрепление с несущими поперечными стенами. Внешняя нагрузка  $q = 0(2)8$  кПа равномерно распределена по средней плите. Все модельные задачи рассматривались в линейной и нелинейной постановке.

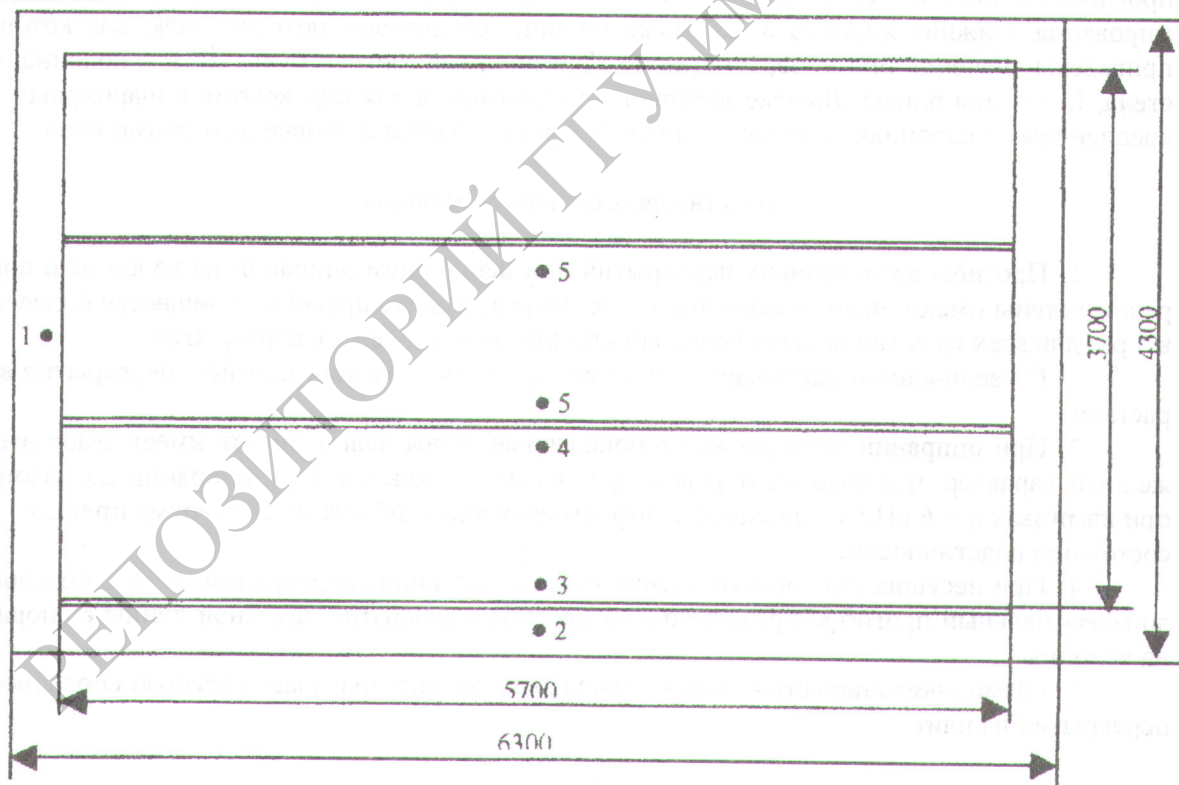


Рис. 1. Перекрытие каркаса здания из трёх многопустотных плит

Для нагрузки  $q = 6$  кПа результаты вычислений, полученные с помощью разработанного ПК «Энергия – 3Д» для условия линейного и нелинейного деформирования, приведены в таблице.

Значения прогибов в точках поперечной оси симметрии перекрытия

| L(см) | $f_2^e$ | $f_2^n$ | $f_3^e$ | $f_3^n$ | $f_4^e$ | $f_4^n$ | $f_5^e$ | $f_5^n$ | Опо-<br>ра | Связи<br>плит |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|---------------|
| 570   |         | 1,85    |         | 2,15    |         | 6,20    |         | 8,80    | к,оп       | все           |
| 570   | 1,24    | 1,95    | 1,42    | 2,19    | 4,44    | 7,54    | 5,35    | 9,08    | к          | швы           |
| 570   | 0,19    | 0,19    | 0,29    | 0,32    | 0,38    | 0,44    | 1,23    | 1,64    | с          | откры-        |
| 720   | 0,29    | 0,30    | 0,48    | 0,54    | 0,58    | 0,68    | 1,90    | 2,72    | с          | ты            |
| 870   | 0,45    | 0,46    | 0,77    | 0,88    | 0,88    | 1,04    | 2,63    | 3,96    | с          |               |
| 570   | 0,95    | 1,16    | 1,34    | 1,64    | 2,78    | 3,38    | 2,8     | 3,4     | к          | плиты         |
| 570   | 0,24    | 0,25    | 0,51    | 0,55    | 0,64    | 0,69    | 0,64    | 0,69    | с          | соеди-        |
| 720   | 0,39    | 0,41    | 0,85    | 0,95    | 0,97    | 1,08    | 0,97    | 1,08    | с          | нены          |
| 870   | 0,63    | 0,66    | 1,26    | 1,45    | 1,37    | 1,57    | 1,37    | 1,57    | с          |               |
| 570   | 1,01    | 1,22    | 1,05    | 1,27    | 2,55    | 3,06    | 2,57    | 3,09    | к          | все           |
| 570   | 0,39    | 0,42    | 0,39    | 0,42    | 0,55    | 0,58    | 0,55    | 0,58    | с          | швы           |
| 720   | 0,66    | 0,74    | 0,67    | 0,75    | 0,81    | 0,89    | 0,81    | 0,89    | с          | закры-        |
| 870   | 1,00    | 1,17    | 1,00    | 1,17    | 1,13    | 1,30    | 1,13    | 1,30    | с          | ты            |

В этой таблице для сравнения приведены значения прогиба эквивалентного диска перекрытия при шарнирном опирании на колонны, полученные в БелНИИС экспериментальным путём, и в результате вычислений по указанной программе при нагрузке  $q = 6 \text{ кПа}$ . Значения прогибов  $f$  даны в мм. Индексы  $e$  и  $n$  являются признаками линейного и нелинейного деформирования. Нижние индексы в заголовке таблицы обозначают номера точек, для которых приведены значения прогибов, (см. рис.1). Тип опоры обозначен буквами: к – колонна, с – стена, L – длина плиты. Данные натурного эксперимента для перекрытия с шарнирным закреплением на колоннах помещены в первой строке таблицы и отмечены буквами «оп».

### Анализ результатов и выводы

1. Прогибы равновеликих перекрытий при шарнирном опирании на колонны и поперечные стены имеют значительные различия. Максимальные прогибы отличаются более чем в 5 раз для всех трёх типов соединения конструктивных элементов перекрытий.
2. С увеличением расстояния между поперечными стенами прогибы перекрытия возрастают.
3. При опирании перекрытия на поперечные стены нелинейность имеет слабо выраженный характер, что говорит о запасе прочности перекрытия. При опирании на колонны при нагрузках  $q = 6 \text{ кПа}$  нелинейность деформирования приближается к своему пределу – к состоянию пластичности.
4. При несущих поперечных стенах увеличение длины перекрытия на 50% обусловило максимальный прогиб в 2 раза меньший прогиба перекрытия исходной длины с опорами на колонны.
5. «Замоличивание» стыковочных швов значительно повышает несущую способность перекрытий из плит.

### Abstract

The authors formulated methods, algorithms and results of the solution of computer modeling problems connected with deflection of blocking made from empty plates such as heterogeneous three-dimensional nonlinear deformable objects.

## Литература

1. О.Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, М.: Мир, 1975.
2. В.З.Партон, П.И.Перлин, Методы математической теории упругости, М.: Наука, 1981.
3. В.А.Постнов, И.Я.Хархурим, Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций, Л.: Судостроение, 1974.
4. В.Е.Быховцев, Компактный алгоритм построения матрицы жесткости в методе конечных элементов, Изд. АН БССР, Серия физ.-мат., № 1, Наука, 1983, С. 34–37.
5. В.Е.Быховцев, Решение краевых задач нелинейной теории упругости методом энергетической линеаризации, Еругинские чтения VI: Тез. докл. междунар. матем. конф. Ч.2, Гомель: ГГУ, 1999, С.9-10.

Поступило 20.05.2002

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф.Скоринны