Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(15), 2002

УДК 517.9+621.3

Применение метода канонических разложений при исследовании флуктуаций в сложных генераторах

С.П.Жогаль, С.И.Жогаль, И.В.Сафонов

В работе метод канонических разложений случайных процессов [1, 2] применен для исследования конкретной радиофизической системы «генератор – объемный резонатор». Подобные системы, состоящие из высокочастотного генератора с запаздывающей обратной связью, внешнего стабилизирующего объемного резонатора, обладающего высокой добротностью и нелинейной безинерционной линии связи между ними, довольно часто применяются в радиотехнике и электронике [3]. Вследствие этого учет флуктуаций в подобных системах является весьма актуальной задачей.

В подобных системах имеют место различные источники шумов, прежде всего тепловые, дробовые и фликкерные шумы [4, 5]. Представляет интерес исследование запаздываний в связях таких систем на интенсивность шумов. Нами рассмотрен случай низкочастотных флуктуаций, что соответствует учету влияния на систему фликкер-шумов [4]. Предположим, что объемный резонатор имеет форму куба с ребром l, характеристика нелинейной безинерционной связи имеет вид $g(v)=\varepsilon\beta v^3$, где $\varepsilon>0$ – малый параметр.

Данная система может быть описана уравнениями:

$$\ddot{v}(t)+\omega_0^2 v(t)=\varepsilon\lambda\left[1-v^2(t)\right]\dot{v}(t-\tau_1)+\varepsilon\beta\left[\int_0^l u(t-\tau_2,\frac{l}{2},\frac{l}{2},z)dz\right]^3+\varepsilon\gamma\xi(t). \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2}=c^2\Delta u(t,x,y,z)+ \\ +\sigma u(t,x,y,z)-\varepsilon\alpha\frac{\partial u(t,x,y,z)}{\partial t}+\varepsilon\beta\delta(x-\frac{l}{2})\delta(y-\frac{l}{2})f(z)v^3(t-\tau_2). \qquad (2)$$

с краевыми условиями:

$$u(t,x,y,z)=0, \text{ при } x,y,z=0,l, \qquad (3)$$

где $\lambda,\beta,c,\sigma,\alpha,\gamma$ – положительные постоянные, $\tau_1>0$ запаздывание в обратной связи генератора, $\tau_2>0$ – запаздывание в линии связи между генератором и резонатором, Δ – оператор Лапласа, $\delta(\zeta)$ – дельта-функция Дирака, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс, имеющий спектральное представление

$$\xi(t)=\sum_k V_k\exp(i\nu_k t), \qquad (4)$$

где $\nu_k>0,\ \nu_k<<\omega_0,\ V_k$ – центрированные взаимно некоррелированные случайные величины, имеющие дисперсии $D_k>0$.

Детерминированный аналог системы (1)-(2), когда влияние шумов не учитывается, был исследован в [3]. Рассмотрим вопрос о влиянии на уровень шумов в системе запаздываний τ_1 и τ_2.

Будем предполагать, что имеет место резонансное соотношение $\omega_0\approx\omega_1=\omega_{111}$, где ω_1 – одна из собственных частот резонатора, которые определяются формулой:

$$\omega_{pmn} = \sqrt{\frac{c^2\pi^2(p^2+m^2+n^2)}{l^2} - \sigma}, \quad (p,m,n = 1,2,\ldots). \qquad (5)$$

Будем искать решение уравнений (1) и (2) в виде канонических представлений [1,6]

$$v(t) = m_v(t) + \sum_k V_k v_k(t), \qquad (6)$$

$$u(t,x,y,z) = m_u(t,x,y,z) + \sum_k V_k u_k(t,x,y,z), \qquad (7)$$

где $m_v(t)$, $m_u(t,x,y,z)$ – неслучайные функции, равные математическим ожиданиям $v(t)$ и $u(t,x,y,z)$ соответственно, а слагаемые $\sum_k V_k v_k(t)$ и $\sum_k V_k u_k(t,x,y,z)$ – отклонения наших решений от их средних значений. Случайные величины V_k называются коэффициентами канонического разложения, а неслучайные функции $v_k(t)$ и $u_k(t,x,y,z)$ – координатными функциями канонических разложений (6) и (7).

Для определения функций $m_v(t), m_u(t,x,y,z), v_k(t)$ и $u_k(t,x,y,z)$ применим метод статистической линеаризации с помощью канонических представлений [1,6]. Получаем следующие уравнения

$$\ddot{m}_v(t) + \omega_0^2 m_v(t) = \varepsilon\lambda\left[1 - m_v^2(t)\right]\dot{m}_v(t-\tau_1) + \varepsilon\beta\left[\int_0^l m_u(t-\tau_2, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}, z)dz\right]^3, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 m_u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = c^2\Delta m_u(t,x,y,z) + \sigma m_u(t,x,y,z) - \varepsilon\alpha\frac{\partial m_u(t,x,y,z)}{\partial t} + \varepsilon\beta\delta(x-\frac{l}{2})\delta(y-\frac{l}{2})f(z)m_v^3(t-\tau_2) \qquad (9)$$

$$\ddot{v}_k(t) + \omega_0^2 v_k(t) = -2\varepsilon\lambda m_v(t)\dot{m}_v(t-\tau_1)v_k(t) + \varepsilon\lambda\left[1-m_v^2(t)\right]\dot{v}_k(t-\tau_1) + 3\varepsilon\beta\left[\int_0^l m_u(t-\tau_2,\frac{l}{2},\frac{l}{2},z)dz\right]^2\int_0^l u_k(t-\tau_2,\frac{l}{2},\frac{l}{2},z)dz + \varepsilon\gamma e^{i\nu_k t} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x,y,z)}{\partial t^2} = c^2\Delta u_k(t,x,y,z) + \sigma u_k(t,x,y,z) - \varepsilon\alpha\frac{\partial u_k(t,x,y,z)}{\partial t} + \varepsilon\beta\delta(x-\frac{l}{2})\delta(y-\frac{l}{2})f(z)m_v^2(t-\tau_2)u_k(t-\tau_2) \qquad (11)$$

с краевыми условиями:

$$m_u(t,x,y,z) = 0, \;\; u_k(t,x,y,z) = 0, \;\text{ при }\; x,y,z = 0,l\,. \qquad (12)$$

Для подобного рода систем будем рассматривать одночастотные колебания с частотой, близкой к ω_0.

В силу данных предположений при $\varepsilon \neq 0$, но достаточно малом, решение системы (8)-(9) будем искать в виде:

$$m_v(t) = b(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = b(t)\cos\psi(t), \qquad (13)$$

$$m_u(t,x,y,z) = a(t)\cos[\omega_1 t + \theta_1(t)]\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi z}{l} = a(t)\cos\varphi(t)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi z}{l}, \qquad (14)$$

где $a(t), b(t), \psi(t), \varphi(t)$ определяются из соотношений, полученных для соответствующей детерминированной системы в [3].

Подставляя выражения (13), (14) в уравнения (10), (11), применяя принцип усреднения [5,7] и опуская запаздывания у медленно изменяющихся переменных, получаем систему уравнений

$$\ddot{v}_k(t) + \omega_0^2 v_k(t) = -\varepsilon\lambda b^2 \omega_0 \sin(\tau_1\omega_0) v_k(t) + \varepsilon\lambda\left[1 - \frac{b^2}{2}\right]\dot{v}_k(t-\tau_1) + 6\varepsilon\beta a^2 \frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l u_k(t-\tau_2, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}, z)dz + \varepsilon\gamma e^{i\nu_k t}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x,y,z)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u_k(t,x,y,z) + \sigma u_k(t,x,y,z) - \varepsilon\alpha \frac{\partial u_k(t,x,y,z)}{\partial t} + 3\varepsilon\beta b^2 \delta(x - \frac{l}{2})\delta(y - \frac{l}{2}) f(z) v_k(t-\tau_2). \qquad (16)$$

Система (15), (16) с учетом краевого условия (12) имеет приближенное частное решение:

$$v_k(t) \approx \varepsilon\gamma e^{i\nu_k t} \times \left\{ \omega_0^2 - \nu_k^2 + \varepsilon\lambda\left[b^2\omega_0 \sin(\tau_1\omega_0) - \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) i\nu_k e^{-i\nu_k\tau_1}\right] + 72\varepsilon^2\beta^2 a^2 b^2 \frac{l}{\pi^3} e^{-2i\nu_k\tau_2} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{p,m,n} \frac{h_{2n-1}}{(2n-1)\left(\varepsilon\alpha i\nu_k - \nu_k^2 + \left[c(2m-1)(2n-1)\frac{\pi^3}{l^3}\sigma\right]\right)} \right\}^{-1}$$

$$u_k(t,x,y,z) \approx \frac{6\varepsilon^2\beta\gamma b^2 e^{i\nu_k t}}{l^2 e^{i\nu_k\tau_2}} \sum_{p,m,n} \sin\frac{p\pi}{2} \sin\frac{m\pi}{2} h_n \sin\frac{p\pi x}{l} \sin\frac{m\pi y}{l} \sin\frac{n\pi z}{l} \times$$

$$\left\{\left(\varepsilon\alpha i\nu_k - \nu_k^2 + \left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2 - \sigma\right)\left(\omega_0^2 - \nu_k^2 + \varepsilon\lambda\left[b^2\omega_0 \sin(\omega_0\tau_1) - \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) i\nu_k e^{-i\nu_k\tau_1}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 36\varepsilon^2\beta^2 a^2 b^2 \frac{l}{\pi^3} e^{-2i\nu_k\tau_2} \sum_{p,m,n} \left(1 - (-1)^n\right) \frac{h_n}{n\left(\varepsilon\alpha i\nu_k - \nu_k^2 + \left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2 - \sigma\right)}\right)\right\}^{-1},$$

где

$$h_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(z) \sin\frac{n\pi z}{l} dz.$$

Интенсивность шумов определяется дисперсиями D_v и D_u, для которых получены следующие оценки:

$$D_v \approx \varepsilon^2\gamma^2 \sum_k D_k \frac{1}{(\omega_0^2 - \nu_k^2)^2}\left\{1 - \frac{1}{\omega_0^2 - \nu_k^2} \times \left[2\varepsilon\lambda\left(b^2\omega_0 \sin(\omega_0\tau_1) - \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\nu_k \sin(\nu_k\tau_1)\right) + \right.\right.$$

$$+144\varepsilon^2\beta^2\alpha^2 b^2\frac{l}{\pi^3}\cos(2\nu_k\tau_2)\sum_{p,m,n}S^k_{pmn}\Bigg]-\frac{1}{(\omega_0^2-\nu_k^2)^2}\Bigg[\varepsilon^2\Bigg(\lambda b^2\omega_0\sin(\omega_0\tau_1)-$$

$$-\lambda\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\nu_k\sin(\nu_k\tau_1)\Bigg)^2-\varepsilon^2\lambda^2\left(1-\frac{b^2}{2}\right)^2\nu_k^2\cos^2(\nu_k\tau_1)-4\varepsilon^2\lambda^2\times \quad (18)$$

$$\times\left(b^2\omega_0\sin(\omega_0\tau_1)-\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\nu_k\sin(\nu_k\tau_1)\right)^2\Bigg]\Bigg\},$$

где

$$S^k_{pmn}=\frac{h_{2n-1}\left(\nu_k^2-\left[c(2p-1)(2m-1)(2n-1)\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2+\sigma\right)}{(2n-1)\left(-\varepsilon^2\alpha^2\nu_k^2-\left\{\nu_k^2-\left[c(2p-1)(2m-1)(2n-1)\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2+\sigma\right\}^2\right)},$$

$$D_u\approx\frac{36\varepsilon^4\beta^2\gamma^2b^4}{l^4}\sum_k D_k\frac{1}{(\omega_0^2-\nu_k^2)^2}\Bigg\{\left(\sum_{p,m,n}D^k_{pmn}(x,y,z)\right)^2\times\Bigg\{1+\frac{5\varepsilon^2\lambda^2b^4\omega_0^2}{(\omega_0^2-\nu_k^2)^2}\sin^2(\tau_1\omega_0)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2\lambda^2\left(1-\frac{b^2}{2}\right)^2\nu_k^2}{(\omega_0^2-\nu_k^2)^2}\left[1-4\cos(2\nu_k\tau_1)\right]+\frac{2\varepsilon\lambda}{\omega_0^2-\nu_k^2}\left[\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\nu_k\sin(\nu_k\tau_1)-b^2\omega_0\sin(\tau_1\omega_0)\right]\Bigg\}-$$

$$-\varepsilon^2\alpha^2\nu_k^2\left[4\sum_{p,m,n}D^k_{pmn}(x,y,z)\times\sum_{p,m,n}\frac{D^k_{pmn}(x,y,z)}{\left(\left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2-\nu_k^2-\sigma\right)^2}-\left(\sum_{p,m,n}\frac{D^k_{pmn}(x,y,z)}{\left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2-\nu_k^2-\sigma}\right)^2\right]+ \quad (19)$$

$$+72\varepsilon^2\beta^2b^2\alpha^2 l\frac{\cos(2\nu_k\tau_2)}{\pi^3(\omega_0^2-\nu_k^2)}\left(\sum_{p,m,n}D^k_{pmn}(x,y,z)\right)^2\times\sum_{p,m,n}(1-(-1)^n)\frac{h_n}{n\left(\nu_k^2+\sigma-\left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2\right)}-$$

$$-\frac{10}{(\omega_0^2-\nu_k^2)^2}\varepsilon^2\lambda^2b^2\omega_0\nu_k\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\sin(\tau_1\omega_0)\sin(\tau_1\nu_k)\left(\sum_{p,m,n}D^k_{pmn}(x,y,z)\right)^2\Bigg\},$$

где

$$D^k_{pmn}(x,y,z)=\frac{\sin\frac{p\pi}{2}\sin\frac{m\pi}{2}h_n}{\left[cpmn\frac{\pi^3}{l^3}\right]^2-\nu_k^2-\sigma}\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{m\pi y}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Из полученных для D_v и D_u выражений (18)-(19) видно, что небольшое запаздывание обратной связи генератора $\tau_1<\frac{\pi}{\omega_0}$ приводит к уменьшению шумов как в самом генераторе, так и во внешнем стабилизирующем объемном резонаторе. При увеличении запаздывания τ_1

от $\frac{\pi}{\omega_0}$ до $\frac{2\pi}{\omega_0}$ будет наблюдаться увеличение интенсивности шумов. Влияние запаздывания в линии связи τ_2 значительно меньше, чем влияние запаздывания обратной связи генератора τ_1, причем, если в самом генераторе при $\tau_2 < \frac{\pi}{4\nu_{\max}}$ шумы уменьшаются, то в резонаторе – увеличиваются, при τ_2, удовлетворяющем соотношению $\frac{\pi}{4\nu_{\max}} < \tau_2 < \frac{3\pi}{4\nu_{\max}}$, шумы в генераторе увеличиваются, а интенсивность шумов в резонаторе уменьшается. Следует также отметить, что флуктуации колебаний резонатора, вызванные фликкер-шумом генератора, пренебрежимо малы по сравнению с флуктуациями в самом генераторе.

Таким образом, используя внешний высокодобротный объемный резонатор в качестве стабилизирующего и управляя запаздыванием обратной связи τ_1 и запаздыванием в линии связи τ_2, можно свести к минимуму влияние шумов на колебания генератора, добиться большей стабильности параметров колебаний.

Abstract

The delay influence on intensity of noises in radioelectronic complicated generators is investigated by the method of canonical resolutions of stochastic processes.

Литература

1. В.С.Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, М.: Физматгиз, 1960.
2. В.С.Пугачев, И.Н.Синицын, Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация, М.: Наука, 1990.
3. В.П.Рубаник, О.В.Иваницкая, Взаимодействие генератора с объемным резонатором при наличии нелинейной связи с запаздыванием, Радиотехника и электроника, 1987, Т. 326, № 2, С. 371–377.
4. А.Н.Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, М.: Наука, 1968.
5. П.С.Ланда, Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы, М.: Наука, 1980.
6. С.П.Жогаль, С.И.Жогаль, Исследование стохастических квазилинейных колебательных систем, Гомель: ГГУ, 1997.
7. С.П.Жогаль, С.И.Жогаль, Об интегрируемости уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1996, Т.4, №6, С. 92–99.

Поступило 20.05.2002