Проблемы физики, математики и техники, № 4 (5), 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

НЕСКОЛЬКО УТВЕРЖДЕНИЙ, РАВНОСИЛЬНЫХ ГИПОТЕЗЕ РИМАНА

А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SOME ASSERTIONS EQUIVALENT TO RIEMANN HYPOTHESIS

A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Сформулировано несколько утверждений, относящихся к гармоническому анализу на бесконечномерном торе, и доказана их равносильность гипотезе Римана.

Ключевые слова: *гипотеза Римана, бесконечномерный тор, функция Мебиуса, функция Эйлера, формула обращения.*

Some assertions in harmonic analysis on the infinite dimensional torus are stated and their equivalence to Riemann hypothesis is proved.

Keywords: *Riemann hypothesis, infinite dimensional torus, Möbius function, Eiler function, inverse formula.*

Введение

Дзета-функция Римана определяется для комплексных $s=\sigma+it$ при $\sigma>1$ следующим образом:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Для вещественных $s>1$ она рассматривалась еще Эйлером. В своей эпохальной работе [1], опубликованной в 1859 г., Б. Риман аналитически продолжил ее в область $s\neq 1$ и показал, что все так называемые нетривиальные нули дзета-функции (т. е. нули, отличные от –2, –4, –6, ...) лежат в «критической полосе» $0\le\sigma\le 1$. Знаменитая *гипотеза Римана* (далее RH) утверждает, что все нетривиальные нули лежат на «критической прямой» $\sigma=1/2$. Эти исследования были предприняты Б. Риманом в связи с гипотезой Лежандра-Гаусса, согласно которой количество $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x, удовлетворяет соотношению $\pi(x):\mathrm{Li}(x)\to 1(x\to\infty)$, где

$$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$$

– интегральный логарифм. Б. Риман связал это утверждение с распределением комплексных нулей дзета-функции и более того, дал точную формулу для $\pi(x)$, содержащую нетривиальные нули дзета-функции. В упрощенном виде его формула может быть записана следующим образом (если число x не есть степень простого):

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)=x-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log\left(1-x^{-2}\right),$$

где $\Lambda(n)=\log p$, если n есть степень простого, и $\Lambda(n)=0$ в противном случае (функция Мангольдта), а сумма $\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}$ распространяется на все нетривиальные нули ρ дзета-функции и понимается как $\lim_{T\to\infty}\sum_{|\rho|<T}$. При этом гипотеза Лежандра-Гаусса равносильна утверждению $\sum_{n\le x}\Lambda(n)\sim x(x\to\infty)$, и из приведенной выше формулы Римана легко вытекает, что эта гипотеза верна, если все нетривиальные нули лежат слева от прямой $\sigma=1$.

Следует отметить, что исследованиям Римана предшествовали замечательные работы П. Л. Чебышева по распределению простых чисел, в которых фигурировала дзета-функция вещественного переменного. Вкладом Б. Римана, который трудно переоценить, был именно выход в комплексную область, позволивший в конечном счете установить закон распределения простых в натуральном ряде. А именно, в 1898 году Ж. Адамар и Ш. де ля Валле-Пуссен доказали гипотезу Лежандра-Гаусса, установив отсутствие нулей дзета-функции на прямой $\sigma=1$. Эту теорему теперь называют теоремой о простых числах (асимптотическим законом распределения простых чисел в натуральном ряде).

Важность гипотезы Римана для теории чисел объясняется прежде всего тем, что ее справедливость равносильна справедливости теоремы о простых числах с наилучшим возможным остатком. Дело в том, что, как указал сам Б. Риман, RH равносильна следующему утверждению: $\forall\varepsilon>0$

$$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Удивительным образом эта гипотеза связана также с рядом утверждений из таких разных разделов науки, как теория конечных групп преобразований, теория вероятностей, функциональный анализ и даже квантовая механика. Например, доказано, что RH равносильна каждому из следующих утверждений:

1) $\sigma(n) < H_n + e^{H_n}\log H_n$,

где $\sigma(n)$ есть число делителей числа n, $H_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$ (Лагариас, 2002);

2) наибольший порядок $g(n)$ элементов симметрической группы S_n при достаточно больших n удовлетворяет неравенству

$$\log g(n) < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Li}(n)}}$$

(Массиас, Николас, Робин, 1989);

3) для любой ненулевой комплексной функции $g \in C_0^\infty(0,\infty)$ справедливо неравенство

$$\sum_\rho g^*(\rho)\overline{g^*(1-\rho)} > 0,$$

где $g^*(s) = \int\limits_0^\infty g(x)x^{s-1}dx$ – преобразование Меллина функции g (А. Вейль, Э. Бомбьери);

4) для всех натуральных n

$$\sum_\rho (1-(1-1/\rho)^n) \ge 0$$

(Х.-Дж. Ли, 1998);

5) при $\mathrm{Re}s > 1/2$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right) > 0,$$

где $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ (Хинкканен, 1998);

6) $\int\limits_0^\infty\int\limits_{1/2}^\infty \frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3}\log|\zeta(x+iy)|\,dxdy = \pi\frac{3-\gamma}{32}$,

где γ – постоянная Эйлера (Волчаков, 1998);

7) линейная оболочка семейства функций $f_a(t) = \left\{\frac{a}{t}\right\} - a\left\{\frac{1}{t}\right\}, a \in (0;1)$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа) плотна в $L^2[0;1]$ (Бёрлинг, Ниман).

Еще Б. Риман установил функциональное уравнение для дзета-функции, которое можно записать в виде $\xi(s) = \xi(1-s)$. Но доказано, что дзета-функция не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению, что считается причиной столь сложного распределения ее нулей.

По-видимому, сейчас RH – самая знаменитая нерешенная математическая проблема. Следует отметить, что в настоящий момент мало кто сомневается в справедливости этой гипотезы, поскольку многочисленные факты свидетельствуют в ее пользу. Например, доказано, что первые 1,5 миллиарда комплексных нулей дзета-функции (расположенных в порядке возрастания мнимых частей) лежат на критической прямой (ван де Люн, Риэль, Винтнер, 1986). Там же лежат и 3×10^8 ее нулей с мнимыми частями из промежутка $[0;2\times10^{20}]$, а также все нули с мнимыми частями из промежутка $[10^{22};2\times10^{22}+10^{10}]$ (А. Олдыжко). Известно также, что на критической прямой расположено более 40 процентов комплексных нулей дзета-функции (Левинсон, Сельберг, Конри). Доказано, что, гипотетические исключения из RH могут быть расположены на комплексной плоскости крайне редко (Бор, Ландау, Карлсон, Ингам). Доказаны аналоги RH, относящиеся к дзета-функциям алгебраических многообразий над конечными полями (А. Вейль, П. Делинь), некоторые следствия RH получили независимые доказательства и т. д. Кроме того, опровержение RH внесло бы хаос в распределение простых чисел, и считается маловероятным, что природа может быть столь извращенной.

Далее нам понадобятся равносильные RH утверждения, относящиеся к функциям Мебиуса μ и Эйлера φ. Напомним, что по определению $\mu(N_k) = (-1)^k$ где $N_k = p_1...p_k$ есть произведение первых k простых чисел, и $\mu(n) = 0$ для остальных натуральных n; $\varphi(n)$ есть число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

***Теорема* 0.1** (Дж. Литтлвуд). *RH равносильна каждому из следующих утверждений*:

(i) $\forall\varepsilon > 0\ \sum_{n\le x}\mu(n) = O(x^{1/2+\varepsilon})$;

(ii) $\exists A > 0\ \sum_{n\le x}\mu(n) =$

$= O(x^{1/2}\exp(A\log x/\log\log x))$.

***Теорема* 0.2** (Николас, 1985). *RH равносильна каждому из следующих утверждений*: $\forall k/\forall k$, кроме конечного числа,

$$\varphi(N_k) < \frac{e^{-\gamma}N_k}{\log\log N_k},$$

где $N_k = p_1...p_k$ *есть произведение первых* k *простых чисел.*

Ниже с помощью гармонического анализа на полугруппах мы выведем из этих результатов несколько новых утверждений, равносильных RH. Всюду далее систематически будут использоваться следующие обозначения: если $n = p_1^{\alpha_1(n)}p_2^{\alpha_2(n)}...$ – каноническое разложение натурального числа n на простые множители, то $\alpha(n) := (\alpha_1(n), \alpha_2(n),...)$ – финитная последовательность, и для $t \in \mathbb{T}^\omega$ мы полагаем $t^{\alpha(n)} := t_1^{\alpha_1(n)}t_2^{\alpha_2(n)}...$ ($\mathbb{T}^\omega$ обозначает бесконечномерный тор, т. е. счетное произведение единичных окружностей). Тогда, например, из нижеследующего предложения 2.2 вытекает, что RH равносильна такому утверждению:

$\forall k / \forall k$, *кроме конечного числа, справедливо неравенство:*

$$\int_{\mathbb{T}^{\omega}} \frac{g(t)}{t_1 \ldots t_k} dt < \frac{1}{e^{\gamma} N_k^2 \log\log N_k}, \qquad (0.1)$$

где $g(t) = \dfrac{\sum_{n \geq 1} \frac{t^{\alpha(n)}}{n^2}}{\sum_{n \geq 1} \frac{t^{\alpha(n)}}{n^3}}$, а dt – нормированная мера Хаара группы $\mathbb{T}^{\omega}$.

Более подробную информацию, касающуюся гипотезы Римана, можно найти в [2]–[6].

1 Вспомогательные сведения

В этом разделе будут изложены сведения по гармоническому анализу на полугруппах, необходимые для дальнейшего. Систематическое изложение этих (и других) вопросов гармонического анализа содержится в [7]–[9].

Пусть S – абелева полугруппа с сокращениями и нейтральным элементом, записываемая мультипликативно, $G = S^{-1}S$ – группа ее частных. Через $\widehat{S}$ обозначим мультипликативную полугруппу всех *ограниченных полухарактеров* полугруппы S (т. е. ненулевых гомоморфизмов из S в замкнутый единичный диск $\overline{\mathbb{D}}$ комплексной плоскости с операцией умножения), наделенную топологией поточечной сходимости (превращающей ее в компактную топологическую полугруппу), а через $\widehat{S}_+$ – ее компактную подполугруппу, состоящую из неотрицательных полухарактеров. Для $\rho \in \widehat{S}_+$ положим также

$$\widehat{S}_{\rho} := \{\psi \in \widehat{S} : |\psi| \leq \rho\}.$$

Характером полугруппы S будем называть полухарактер, равный по модулю единице; (компактная топологическая) группа характеров полугруппы S будет обозначаться X.

Необходимые нам сведения из [7] мы изложим в виде нескольких лемм.

***Лемма* 1.1** (полярное разложение полухарактера). *Любой полухарактер* $\psi \in \widehat{S}$ *можно представить в виде*

$$\psi = \rho\chi,$$

где $\rho \in \widehat{S}_+$, *а* $\chi \in X$.

Для полухарактера $\rho \in \widehat{S}_+$ через $l_1(\rho)$ мы обозначим нормированное пространство тех комплекснозначных функций f на группе G с не более чем счетным носителем, которые сосредоточены на S, и для которых

$$\|f\| := \sum_{s \in S} |f(s)| \rho(s) < \infty.$$

***Лемма* 1.2**. *Пространство* $l_1(\rho)$ *есть унитальная полупростая коммутативная банахова алгебра со сверткой*

$$f * g(s) := \sum_{xy = s} f(x) g(y)$$

в качестве умножения.

Пусть $f \in l_1(\rho)$. Функцию $\tilde{f}$ на $\widehat{S}_{\rho}$, определенную равенством

$$\tilde{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s) \overline{\psi(s)},$$

будем называть *преобразованием Лапласа* функции f.

***Лемма* 1.3**. *Комплексные гомоморфизмы алгебры* $l_1(\rho)$ *имеют в точности вид* $f \mapsto \tilde{f}(\psi) (\psi \in \widehat{S}_{\rho})$. *В частности,* $\widetilde{f * g} = \tilde{f}\tilde{g}$ *при* $f, g \in l_1(\rho)$.

Пусть $\psi = \rho\chi$ – полярное разложение полухарактера ψ. Тогда ясно, что $\tilde{f}(\psi) = \widehat{(f\rho)}(\chi)$, где «крышка» обозначает преобразование Фурье на группе G. Формула обращения для преобразования Фурье влечет теперь следующее утверждение.

***Лемма* 1.4** (формула обращения для преобразования Лапласа). *Пусть* $f \in l_1(\rho)$. *Если функция* $\chi \mapsto \widehat{(f\rho)}(\chi)$ *принадлежит* $L^1(X)$, *то при всех* s, *для которых* $\rho(s) \neq 0$, *справедливо равенство*

$$f(s) = \frac{1}{\rho(s)} \int_X \tilde{f}(\rho\chi) \chi(s) d\chi,$$

где $d\chi$ *– нормированная мера Хаара группы* X.

2 Формулировка и доказательство основных результатов

Теперь мы в состоянии установить наши основные результаты.

***Предложение* 2.1**. *RH равносильна каждому из следующих утверждений*:

(i) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого/некоторого* $\beta > 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{T}^{\omega}} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt = O(x^{1/2+\varepsilon});$$

(ii) *существует такое* $A > 0$, *что для любого / некоторого* $\beta > 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{T}^{\omega}} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt =$$

$$= O(x^{1/2} \exp(A \log x / \log\log x)).$$

Доказательство. Пусть S есть мультипликативная полугруппа $\mathbb{N}^*$ натуральных чисел. Поскольку это свободная абелева полугруппа, системой образующих которой служит множество простых чисел $\{p_1, p_2, \ldots\}$, каждый ограниченный полухарактер полугруппы S имеет вид

$$\psi(a) = \overline{z}^{\alpha(a)},$$

где $z = (z_1, z_2, ...) \in \overline{\mathbb{D}}^\omega$, $z^{\alpha(a)} = z_1^{\alpha_1(a)} z_2^{\alpha_2(a)} ...$, $z_j = \overline{\psi(p_j)}$, $a = p_1^{\alpha_1(a)} p_2^{\alpha_2(a)} ...$ – каноническое разложение числа a на простые множители. Таким образом, мы можем считать, что $\widehat{\mathbb{N}_+^*} = [0,1]^\omega$, , $\widehat{\mathbb{N}^*} = \overline{\mathbb{D}}^\omega$, а группа характеров полугруппы $\mathbb{N}^*$ есть $\mathbb{T}^\omega$ (через K^ω мы обозначаем тихоновское произведение счетного числа экземпляров компакта K).

Для этого случая, отождествляя полухарактер $\psi(a) = \overline{z}^{\alpha(a)}$ с соответствующей точкой $z \in \overline{\mathbb{D}}^\omega$, получаем, что преобразование Лапласа имеет вид

$$\tilde{f}(z) = \sum_{a=1}^{\infty} f(a) z^{\alpha(a)}.$$

Если полухарактеру $\rho \in \widehat{\mathbb{N}_+^*}$ соответствует точка r из $[0,1]^\omega$, то алгебра $l_1(\rho)$ состоит из всех арифметических функций f, для которых абсолютно сходится ряд $\sum_{a=1}^{\infty} f(a) r^{\alpha(a)}$. Свертка в $l_1(\rho)$ задается формулой

$$(f * g)(a) = \sum_{d|a} f(d) g\left(\frac{a}{d}\right),$$

где суммирование распространяется на все положительные делители числа a («свертка Дирихле»); функция $1_{\{1\}}$ (индикатор одноточечного множества $\{1\}$) будет единицей этой алгебры.

В этом случае, при условии, что функция $t \mapsto \tilde{f}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$, формула обращения для функций $f \in l_1(\rho)$ ($\rho(a) = r^{\alpha(a)}$, $r \in [0;1]^\omega$) принимает вид

$$f(a) = \frac{1}{r^{\alpha(a)}} \int_{\mathbb{T}^\omega} \tilde{f}(r.t) t^{-\alpha(a)} dt, \qquad (2.1)$$

где dt – нормированная мера Хаара группы $\mathbb{T}^\omega$, а $r.t$ обозначает последовательность $(r_1 t_1, r_2 t_2, ...)$.

Выберем теперь $\rho(a) = a^{-\beta} (\beta > 1$ фиксировано), т. е. положим $r = (p_1^{-\beta}, p_2^{-\beta}, ...)$. Очевидно, что тогда $\mu \in l_1(\rho)$. Применяя к известному тождеству $\mu * 1 = 1_{\{1\}}$ преобразование Лапласа, получаем при $|z_j| < p_j^{-\beta}, j \in N$

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{1}{\sum_{a=1}^{\infty} z^{\alpha(a)}}.$$

Покажем, что условия, достаточные для справедливости формулы обращения, здесь выполнены при $\beta > 1$, т. е. что функция $t \mapsto \tilde{\mu}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$. В самом деле, эта функция есть преобразование Фурье функции, определенной на мультипликативной группе $\mathbb{Q}_+$ положительных рациональных чисел (являющейся группой частных полугруппы $\mathbb{N}^*$), но сосредоточенной на полугруппе $\mathbb{N}^*$ и равной на ней $(\mu\rho)(n) = \mu(n) n^{-\beta}$. Поскольку эта функция, очевидно, принадлежит $L^2(\mathbb{Q}_+)$, то функция $t \mapsto \tilde{\mu}(r.t)$ принадлежит $L^2(\mathbb{T}^\omega) \subset L^1(\mathbb{T}^\omega)$ по теореме Планшереля.

Значит, для функции Мебиуса имеем при любом $\beta > 1$ в силу формулы обращения следующее интегральное представление (у нас $r^{\alpha(n)} = n^{-\beta}$):

$$\mu(a) = a^\beta \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt. \qquad (2.2)$$

Следовательно,

$$\sum_{a \leq x} \mu(a) = \int_{\mathbb{T}^\omega} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 0.1.

Более простой вид имеет следующий критерий справедливости RH.

***Предложение* 2.2.** *RH равносильна каждому из следующих утверждений*: $\forall k / \forall k$, *кроме конечного числа, справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{g(t)}{t_1 ... t_k} dt < \frac{1}{e^\gamma N_k^{\beta-1} \log\log N_k},$$

где $g(t) = \dfrac{\sum_{m \geq 1} \frac{t^{\alpha(m)}}{m^{\beta-1}}}{\sum_{m \geq 1} \frac{t^{\alpha(m)}}{m^\beta}}$, $\beta > 2$.

Доказательство. Будем рассуждать как в доказательстве предложения 2.1 (как и там, мы берем $\rho(a) = a^{-\beta}$, но считаем, что $\beta > 2$). Поскольку, очевидно, $\varphi(n) < n$, то $\varphi \in l_1(\rho)$. Применяя теперь преобразование Лапласа к известному тождеству

$$\varphi * 1 = \mathrm{id}$$

(здесь $\mathrm{id}(n) = n$), получаем $\tilde{\varphi}(z) \cdot \tilde{1}(z) = \widetilde{\mathrm{id}}(z)$ при $|z_j| < p_j^{-\beta}, j \in \mathbb{N}$, откуда

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m z^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^{\infty} z^{\alpha(m)}}.$$

Покажем, что условия, достаточные для справедливости формулы обращения, здесь выполнены при $\beta > 2$. Действительно, функция $t \mapsto \tilde{\varphi}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$, поскольку

$$|\tilde{\varphi}(r.t)| = \frac{|\widetilde{\mathrm{id}}(r.t)|}{|\tilde{1}(r.t)|} = |\widetilde{\mathrm{id}}(r.t)| \cdot |\tilde{\mu}(r.t)|,$$

причем первый сомножитель ограничен,

$$|\widetilde{\mathrm{id}}(r.t)| \le \sum_{m\ge 1} m^{1-\beta} < \infty,$$

а второй принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$ (см. доказательство предложения 2.1).

Следовательно, по формуле обращения (2.1) имеем при любом $\beta > 2$ следующее интегральное представление функции Эйлера ($r^{\alpha(n)} = n^{-\beta}$):

$$\varphi(n) = n^\beta \int_{T^\omega} \frac{\sum_{m=1}^\infty m^{1-\beta} t^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^\infty m^{-\beta} t^{\alpha(m)}} t^{-\alpha(n)} dt, \qquad (2.3)$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 0.2, так как $t^{\alpha(N_k)} = t_1 \dots t_k$.

Полагая $\beta = 3$ в предложении 2.2, получаем утверждение (0.1), сформулированное во введении.

***Замечание* 2.1.** Теперь, когда формулы (2.2) и (2.3) получены с помощью гармонического анализа на полугруппах, можно дать их доказательство, являющееся концептуально более простым. Докажем формулу (2.2). Прежде всего заметим, что при $\beta > 1$ справедливо следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{t^{\alpha(n)}}{n^\beta} = \sum_{n=1}^\infty \frac{t_1^{\alpha_1(n)} t_2^{\alpha_2(n)} \dots}{(p_1^\beta)^{\alpha_1(n)} (p_2^\beta)^{\alpha_2(n)} \dots} = \\ = \prod_{j=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{t_j}{p_j^\beta} \right)^m = \prod_{j=1}^\infty \frac{1}{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}. \qquad (2.4)$$

Поэтому для натурального a

$$I(a) := \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{1}{\sum_{n=1}^\infty n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt = \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{t^{-\alpha(a)}}{\prod_{j=1}^\infty \left(1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}\right)^{-1}} dt =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^\omega} \prod_{j=1}^\infty \frac{1}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}\right)^{-1} t_j^{\alpha_j(a)}} dt =$$

$$= \prod_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j,$$

где все меры dt_j совпадают с нормированной мерой Хаара группы $\mathbb{T}$ (последнее означает, что $\int_{\mathbb{T}} f(t_j) dt_j = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{d\varphi}{2\pi}$ для любой непрерывной функции f на $\mathbb{T}$).

Возможны два случая.

1) Число a делится на квадрат простого, т. е. $\alpha_j(a) \ge 2$ при некотором j. В этом случае, используя свойство ортогональности характеров компактной группы (или прямым счетом), получаем, что

$$I_j(a) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j = 0,$$

а потому $I(a) = 0$, что доказывает (2.2) для выбранных a.

2) Число a свободно от квадратов, т. е. $\alpha_j(a) \in \{0;1\}$ при всех j. Как и в предыдущем случае, здесь легко подсчитать, что

$$I_j(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_j(a) = 0 \\ -1/p_j^\beta, & \text{если } \alpha_j(a) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $a = p_1 \dots p_k$, то $I(a) = \prod_j I_j(a) = (-1)^k / a^\beta$, что равносильно формуле (2.2) в этом случае.

Докажем формулу (2.3). Из формулы (2.4) следует, что для натурального a

$$J(a) := \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{\sum_{n\ge 1} n^{1-\beta} t^{\alpha(n)}}{\sum_{n\ge 1} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt = \prod_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^{\beta-1}}\right) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_j(a) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^{\beta-1}}\right) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j =$$

$$= \frac{1}{p_j} \int_{\mathbb{T}} \frac{p_j^\beta - t_j}{(p_j^{\beta-1} - t_j) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j.$$

Поскольку

$$\frac{p_j^\beta - t_j}{p_j^{\beta-1} - t_j} = 1 + (p_j - 1) \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{t_j}{p_j^{\beta-1}} \right)^m,$$

то, пользуясь ортонормированностью характеров группы $\mathbb{T}$, получим

$$J_j(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_j(a) = 0 \\ \dfrac{p_j - 1}{p_j^{(\beta-1)\alpha_j(a)+1}}, & \text{если } \alpha_j(a) \ge 1. \end{cases}$$

Поэтому, если $a = p_1^{\alpha_1(a)} \dots p_k^{\alpha_k(a)}$, то

$$J(a) = \prod_j J_j(a) = \prod_{j=1}^k \frac{p_j - 1}{p_j^{(\beta-1)\alpha_j(a)+1}} = \frac{\varphi(a)}{a^\beta}$$

(мы воспользовались тем, что $\varphi(a) = a \prod_{j=1}^k (1 - 1/p_j)$). Последнее равенство равносильно формуле (2.3).

***Замечание* 2.2.** Подобно формулам (2.2) и (2.3) могут быть получены интегральные представления и других арифметических функций. Так, например, исходя из тождества

$$\Lambda * 1 = \log$$

([10, с. 145]), для функции Мангольдта Λ имеем при $\beta > 1$

$$\Lambda(n) = n^\beta \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{\sum_{m=1}^\infty m^{-\beta} \log m t^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^\infty m^{-\beta} t^{\alpha(m)}} t^{-\alpha(n)} dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riemann, B.* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse / B. Riemann – in: Monat. der Königl. – Berlin : Preuss. Akad. der Wissen., 1859 (1860). – P. 671–680.

2. *Corney, J.B.* The Riemann Hypothesis / J.B. Corney // Notices of the AMS. – 2004. – Vol. 50, № 3. – P. 341–353.

3. *Bombieri, E.* The Riemann Hypothesis / E. Bombieri – in.: The Millennium Prize Problems. – Providence, RI : AMS, 2006. – P. 107–129.

4. *The Riemann Hypothesis* [Electronic resource]. – Mode of access : http://www.aimath.org/WWN/rh/. – Data of access : 15.09.10.

5. *Titchmarsh, E.S.* The Theory of the Riemann Zeta Function / E.S. Titchmarsh – 2nd ed. revised by R. D. Heath-Brown. – Oxford : Oxford University Press, 1986.

6. *Ivič, A.* The Riemann Zeta-Function – The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications / A. Ivič – New York : John Wiley, 1985.

7. *Миротин, А.Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

8. *Rudin, W.* Fourier Analysis on Groups / W. Rudin – New York : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.

9. *Люмис, Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ / Л. Люмис. – М. : ИЛ, 1956. – 251 с.

10. *Постников, А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь, договор 20061473.

Поступила в редакцию 25.10.10.