Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(15), 2002

УДК 517.5

Об одном подходе к упрощению модели сложного процесса на основе алгебраических многочленов

Г.Н.Казимиров

Обозначим через $f(t)$ исследуемый процесс, где t – время. Будем полагать, что модель процесса $f(t)$ известна, но является сложной для исследования либо не удовлетворяет нас по каким-то причинам. Требуется подобрать другую, более простую функцию вместо $f(t)$, достаточно близкую к исходной.

В настоящей работе рассматриваются функции f из достаточно широкого класса и для них подбираются более простые функции P_n (алгебраические многочлены степени не выше, чем n-1), близкие в некотором смысле к исходным и даётся оценка порядка близости f к P_n.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$.

Через $L_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x^2)^\alpha \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha} = \left\| f(x)(1-x^2)^\alpha \right\|_p$

Обозначим через $E_n(f)_{p,\alpha}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем n-1, в метрике $L_{p,\alpha}$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P_n \in P} \left\| P_n(x) - f(x) \right\|_{p,\alpha},$$

где P-множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n-1, $n = 1, 2, \ldots$.

Для $\nu > (-1/2)$ определим оператор обобщённого сдвига Якоби

$$T_h(f,x,\nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f(x \cosh + y \sinh \sqrt{1-x^2})(1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy.$

Введём обозначения ($r = 2, 3, \ldots$):

$$\Delta_h^1(f,x,\nu) = T_h(f,x,\nu) - f(x), \quad \Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f,x,\nu) = \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1,\ldots,h_{r-1}}^{r-1}(f,x,\nu),x,\nu),$$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} = \sup_{|h_i| \le \delta, i=1,\ldots,r} \left\| \Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f,x,\mu) \right\|_{p,\alpha}.$$

Теорема 1. *Пусть даны числа p,ν,r такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$, $r=1,2,3,\ldots$ Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2)<\alpha\le\nu$ при $p=1$, $-(1/2p)<\alpha<\nu+(1/2)-(1/2p)$ при $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\nu+(1/2)$ при $p=\infty$. Тогда для $f\in L_{p,\alpha}$ справедливы неравенства:*

$$C_1E_n(f)_{p,\alpha}\le\widetilde{\omega}_r(f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha}\le\frac{C_2}{n^{2r}}\sum_{m=1}^{n}m^{2r-1}E_m(f)_{p,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и $n(n=1,2,3,\ldots)$.

Теорема 1 доказана в работе [2].

Теорема 2. *Пусть числа p,ν,r,α,λ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$, $r=1,2,3,\ldots$, $-(1/2)<\alpha\le\nu$ при $p=1$, $-(1/2p)<\alpha<\nu+1-(1/p)$ при $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\nu+1$ при $p=\infty$, $2\max\{0,\alpha-\nu-(1/2)+(1/2p)\}<\lambda<2r$. Тогда, если для $f\in L_{p,\alpha}$ справедливо неравенство $\widetilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha}\le C_3\delta^{\lambda}$, где положительная постоянная C_3 не зависит от δ, то $E_n(f)_{p,\alpha}\le\frac{C_4}{n^{\lambda}}$, причём последняя оценка достигается для алгебраического многочлена*

$$Q(x)=\frac{(-1)^r}{(\gamma(m,\nu))^r}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}(\Delta^r_{t_1,\ldots,t_r}(f,x,\nu)+(-1)^rf(x))\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}}\right)^{2q+4}\left(\sin\frac{t_s}{2}\cos\frac{t_s}{2}\right)^{2\nu+1}dt_1\ldots dt_r$$

имеющего при m и q, таких что $\frac{n-1}{q+2}<m\le\frac{n-1}{q+2}+1$ степень не выше чем n-1, т.е. $\|f-Q\|_{p,\alpha}\le\frac{C_4}{n^{\lambda}}$, где постоянная C_4 не зависит от $n(n=1,2,3,\ldots)$.

Теорема 2 доказана в работе [3].

Будем обозначать: $D_{x,\nu}=(1-x^2)^{-\nu}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\nu+1}\frac{d}{dx}$, $D^0_{x,\nu}=I$, где I-тождественный оператор, $D^1_{x,\nu}=D_{x,\nu}$ и для $k=2,3,\ldots$ $D^k_{x,\nu}=D^1_{x,\nu}(D^{k-1}_{x,\nu})$. Через $AD^r(\nu)_{p,\alpha}$ обозначим множество таких функций g, что g имеет абсолютно непрерывную на каждом $[a,b]\subset(-1,1)$ 2r-1 производную и $D^l_{x,\nu}g\in L_{p,\alpha}$ для $l=0,1,2,\ldots,r$.

Цель работы – доказать следующую теорему

Теорема 3. *Пусть даны числа p,ν,k,r такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$, $r=1,2,3,\ldots$, $k=1,2,3,\ldots$ Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2)<\alpha\le\nu$ при $p=1$, $-(1/2p)<\alpha<\nu+(1/2)-(1/2p)$ при $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\nu+(1/2)$ при $p=\infty$.*

Тогда для функции $f\in AD^r(\nu)_{p,\alpha}$ справедливо неравенство

$$E_n(f)_{p,\alpha}\le\frac{C_5}{n^{2r}}\widetilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha},$$

где положительная постоянная C_5 не зависит от f и $n(n=1,2,3,\ldots)$.

Доказательству теоремы предпошлём несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть даны числа p,ν такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$. Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2)<\alpha\le\nu$ при $p=1$, $-(1/2p)<\alpha<\nu+(1/2)-(1/2p)$ при $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\nu+(1/2)$ при*

$p=\infty$. Тогда, если $f \in L_{p,\alpha}$, то и $T_t(f,x,\nu) \in L_{p,\alpha}$ и $\| T_t(f,x,\nu) \|_{p,\alpha} \le C_6 \|f\|_{p,\alpha}$, где положительная постоянная C_6 не зависит от f и t.

Лемма 1 доказана в [4].

Для $0<h\le\frac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f,x,\nu) = \frac{1}{\varphi(h)}\int_0^h (\sin\omega)^{-2\nu-1}\int_0^\omega (\sin u)^{2\nu+1} T_u(f,x,\nu)\,du\,d\omega,$$

где $\varphi(h) = \int_0^h (\sin\omega)^{-2\nu-1}\int_0^\omega (\sin u)^{2\nu+1}\,du\,d\omega$

Пусть $L_h^1(f,x,\nu)=L_h(f,x,\nu)$, а для k=2,3,… $L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu)=L_{h_l}(L^{l-1}_{h_1,\dots,h_{l-1}}(f,x,\nu),x,\nu)$.

Лемма 2. *Пусть даны числа p,ν,l такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu > -(1/2)$, $l = 1,2,3,\dots$ Пусть число α выбрано по правилу: $-(1/2)<\alpha\le\nu$ при $p=1$, $-(1/2p)<\alpha<\nu+(1/2)-(1/2p)$ при $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\nu+(1/2)$ при $p=\infty$. Тогда, если $f\in L_{p,\alpha}$, то при любых $h_1,\dots,h_l \in (0,\frac{\pi}{2}]$ $L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu)\in AD^l(\nu)_{p,\alpha}$ и справедливо равенство:*

$$D^l_{x,\nu}L^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu) = \frac{1}{\varphi(h_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(h_l)}\Delta^l_{h_1,\dots,h_l}(f,x,\nu).$$

Лемма 2 доказывается почти дословным повторением леммы 11 из [2], стр.30.

Лемма 3. *Пусть даны числа p,ν такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu > -(1/2)$. Пусть число α выбрано по правилу: $\alpha\le\nu$ при $p=1$, $\alpha<\nu+1-(1/p)$ при $1<p<\infty$, $\alpha<\nu+1$ при $p=\infty$. Тогда, если $f\in L_{p,\alpha}$, то $f\in L_{1,\nu}$.*

Лемма 3 доказана в [2], стр.21.

Лемма 4. *Пусть $g\in AD^k(\nu)_{1,\nu}, \nu>-(1/2)$. Тогда для почти всех $x\in[-1,1]$ и всех $t_1,\dots,t_l\in R, k=1,2,3,\dots; l=1,2,3,\dots$ справедливо равенство:*

$$D^k_{x,\nu}T^l_{t_1,\dots,t_l}(g,x,\nu)=T^l_{t_1,\dots,t_l}(D^k_{x,\nu}g,x,\nu)$$

Лемма 4 доказана в [5], стр.26.

Доказательство теоремы 3: Из определения k-й обобщённой разности, теоремы Лебега о предельном переходе, леммы 2, леммы 3 и леммы 4 имеем

$$\Delta^{r+k}_{h_1,\dots,h_{r+k}}(f,x,\nu) = \Delta^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^r_{h_1,\dots,h_k}(f,x,\nu),x,\nu) =$$

$$= \varphi(h_{k+1})\cdot\ldots\cdot\varphi(h_{k+r})D^r_{x,\nu}L^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^k_{h_1,\dots,h_k}(f,x,\nu),x,\nu) =$$

$$= \varphi(h_{k+1})\cdot\ldots\cdot\varphi(h_{k+r})L^r_{h_{k+1},\dots,h_{r+k}}(\Delta^k_{h_1,\dots,h_k}(D^r_{x,\nu}f,x,\nu),x,\nu).$$

Используя обобщённое неравенство Минковского, Лемму 1 и очевидное неравенство: $|\varphi(h)| \le C_6 h^2$ при $0 < h \le \frac{\pi}{2}$, где C_6 не зависит от h, имеем, что

$$\left\|\Delta^{r+k}_{h_1,\ldots,h_{r+k}}(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha} \le C_7 h^2_{k+1}\cdot\ldots\cdot h^2_{r+k}\left\|\Delta^{k}_{h_1,\ldots,h_k}(D^r_{x,\nu}f,x,\nu),x,\nu\right\|_{p,\alpha}.$$

Из определения k-го обобщённого модуля гладкости получаем, что $\widetilde{\omega}_{r+k}(f,\delta,\nu)_{p,\alpha} \le C_8\delta^{2r}\widetilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\delta,\nu)_{p,\alpha}$

По теореме 1

$$E_n(f)_{p,\alpha} \le C_9\widetilde{\omega}_{r+k}(f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha} \le \frac{C_{10}}{n^{2r}}\widetilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha}.$$

Теорема 2 доказана.

Abstract

In this paper there are considered composite functions characterized by the value of the k-th generalized modulus of smoothness determined with the help of the Jacobi generalized shift operator.

Литература

1. В.П.Кузнецов, Экономико-математические методы и модели, Конспект лекций, Мн.: МИУ, 2000.

2. Г.Н.Казимиров, О теоремах Джексона для к-го обобщённого модуля гладкости, Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, 3054-В94.

3. М.К.Потапов, Г.Н.Казимиров, О приближении алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k-го обобщённого модуля гладкости. Математические заметки, Том 63, выпуск 3, март 1988.

4. М.К.Потапов, О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения, Труды МИАН СССР, 1975, **134**, С. 260-277.

5. Г.Н.Казимиров, Приближение алгебраическими многочленами функций с данным k-м обобщённым модулем гладкости, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук, Москва, 1995, 106 с.

Поступило 20.05.2002