Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(15), 2002

УДК 517.925

Уравнения Риккати, четно-эквивалентные стационарным

В.В.Мироненко

Рассматриваются четные преобразования уравнения Риккати. Полученные результаты применены для исследования периодических решений этого уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = P(t)x^2(t) + Q(t)x(t) + R(t) \tag{1}$$

Будем рассматривать всевозможные четные по t дробно-линейные преобразования этого уравнения вида

$$S(t,x) = \frac{m(t)x + n(t)}{r(t)x + s(t)}. \tag{2}$$

Известно [1, с.47], что они переводят уравнение Риккати в уравнение Риккати.

Лемма 1. *Пусть существует четное по t дробно-линейное преобразование (2), сводящее уравнение (1) к стационарному уравнению Риккати. Тогда существует и четное по t дробно-линейное преобразование $S_1(t,x)$, сводящее уравнение (1) к стационарному уравнению, для которого выполнено свойство* $S(0,x) \equiv x$.

Доказательство осуществим, в качестве $S_1(t,x)$ взяв $S^{-1}(0, S(t,x))$.

Лемма 2. *Четное по t дробно-линейное преобразование (2), сводящее уравнение (1) к некоторому уравнению Риккати $\dot{y} = L(t)y^2 + M(t)y + N(t)$, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\begin{aligned} S_t(t,x) + S_x(P_н x^2 + Q_н x + R_н) &= L_н S^2(t,x) + M_н S(t,x) + N_н \\ S_x(t,x)(P_ч x^2 + Q_ч x + R_ч) &= L_ч S^2(t,x) + M_ч S(t,x) + N_ч. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Для любого решения $x(t)$ системы (1) имеет место следующее соотношение:

$$\dot{y}(t) = S_t(t, x(t)) + S_x(t, x(t))(P(t)x^2(t) + Q(t)x(t) + R(t)) \overset{t}{\equiv} LS^2(t, x(t)) + MS(t, x(t)) + N.$$

Отсюда $S_t(t,x) + S_x(t,x)(Px^2 + Qx + R(t)) \overset{t,x}{\equiv} LS^2(t,x) + MS(t,x) + N.$

Так как S — четно по t, то S_t — нечетно, S_x — четно.

Выделяя в последнем тождестве четную и нечетную части, придем к искомым соотношениям.

Теорема 1. *Пусть существует четное по t дробно-линейное преобразование (2), сводящее уравнение (1) к стационарному уравнению Риккати и обладающее свойством $S(0,x)=x$. Тогда это стационарное уравнение имеет вид*

$$\dot{y} = P_0 x^2 + Q_0 x + R_0, \tag{4}$$

где $P_0 = P(0), Q_0 = Q(0), R_0 = R(0)$, *причем для него выполнены соотношения*

$$S_t(t,x) + S_x(P_н x^2 + Q_н x + R_н) = 0, S_x(t,x)(P_ч x^2 + Q_ч x + R_ч) = P_0 S^2(t,x) + Q_0 S(t,x) + R_0. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть замена (2) сводит уравнение (1) к некоторому стационарному уравнению $\dot{y} = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$, где C_1, C_2, C_3 суть некоторые постоянные. Тогда из соотношений (3) вытекают соотношения

$$S_t(t,x) + S_x(P_н x^2 + Q_н x + R_н) = 0, S_x(t,x)(P_ч x^2 + Q_ч x + R_ч) = C_1 S^2(t,x) + C_2 S(t,x) + C_3.$$

Положив во втором из этих соотношений t=0, получим

$$S_x(0,x)(P_0 x^2 + Q_0 x + R_0) \equiv C_1 S^2(0,x) + C_2 S(0,x) + C_3.$$

Согласно условию теоремы, $S(0,x) \equiv x$ и, следовательно, $C_1 = P_0, C_2 = Q_0, C_3 = R_0$, откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Лемма 3. *Пусть существует четное по t дробно-линейное преобразование (2), сводящее уравнение (1) к уравнению (4). Тогда существует и четное по t дробно-линейное преобразование* $S_1(t,x) = \dfrac{m_1(t)x + n_1(t)}{r_1(t)x + s_1(t)}$, *такое, что* $m_1 s_1 - r_1 n_1 = 1$, *также сводящее уравнение (1) к стационарному уравнению(4).*

Доказательство. Положим в замене S_1

$$m_1 = \frac{m}{ms - rn}, n_1 = \frac{n}{ms - rn}, r_1 = \frac{r}{ms - rn}, s_1 = \frac{s}{ms - rn}.$$

Так взятая замена S_1 и есть искомая замена.

Лемма 4. *Чтобы некоторой четной дробно-линейной заменой (2), такой, что S(0,x)=x и* $ms - rn = 1$, *уравнение (1) сводилось к уравнению (4), необходимо и достаточно, чтобы пары коэффициентов* m, s *и* r, n *являлись решениями системы дифференциальных уравнений*

$$2z_1' = z_1 Q_н - 2z_2 P_н, 2z_2' = 2z_1 R_н - z_2 Q_н \quad (6)$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = 1, z_1(0) = 0 \text{ и } z_1(0) = 0, z_2(0) = 1 \quad (7)$$

соответственно, и выполнялись соотношения

$$P_ч = P_0 m^2 + Q_0 mr + R_0 r^2, Q_ч = 2P_0 nm + Q_0(nr + ms) + 2R_0 rs,$$
$$R_ч = P_0 n^2 + Q_0 ns + R_0 s^2. \quad (8)$$

Доказательство. Необходимость. Подействуем на уравнение (1) заменой (2). Согласно теореме 1, должны выполняться равенства (5).

Учитывая, что

$$S_x = \frac{ms - rn}{(rx+s)^2} = \frac{1}{(rx+s)^2}, S_t = \frac{(m'r - r'm)x^2 + (n'r + m's - s'm - r'n)x + n's - s'n}{(rx+s)^2},$$

и приводя подобные во втором из равенств (5), придем к системе

$$m'r - r'm = -P_н, n's - s'n = -R_н, m's - s'm + n'r - nr' = -Q_н.$$

Присоединим к этой системе уравнение $m's + s'm + n'r - nr' = (ms - rn)' = 0$.

Тогда, складывая и вычитая последние два уравнения системы, получим:

$$2m's - 2nr' = -Q_н, 2ms' - 2n'r = Q_н.$$

Эти соотношения позволяют нам прийти к следующим равенствам:

$$2m'sr - 2nrr' = -rQ_i, 2m'sr - 2msr' = -2P_i s; 2mss' - 2n'sr = sQ_i, 2n'sr - 2s'rn = -2rR_i;$$
$$2mns' - 2n'nr = nQ_i, 2n'sm - 2s'mn = -2mR_i; 2m'ms - 2mnr' = -mQ_i, 2m'rn - 2mnr' = -2nP_i.$$

Эти равенства, в свою очередь, приводят нас к совокупности дифференциальных систем

$$\begin{cases} 2r' = -rQ_н + 2sP_н \\ 2s' = sQ_н - 2rR_н \end{cases}, \begin{cases} 2m' = -mQ_н + 2nP_н \\ 2n' = nQ_н - 2mR_н \end{cases}.$$

Выполнение начальных условий очевидно.

К соотношениям (6) придем, приводя подобные в первом уравнении из уравнений (5).

Достаточность. На достаточных условиях леммы осуществим преобразование (2), обладающее свойством *ms-rn=1*. Нужно показать, что замена (2) сводит уравнение (1) к уравнению (4). В общем случае уравнение вида $\dot{x} = f(t,x)$ сводится четной заменой *y=S(t,x)* к уравнению $\dot{y} = S_t + S_x f = S_t + S_x f_н + S_x f_ч$. Применительно к нашей лемме

$$S_t + S_x f_н = \frac{(m'r - r'm)x^2 + (n'r + m's - s'm - r'n)x + n's - s'n}{(rx+s)^2} + \frac{ms - rn}{(rx+s)^2}(P_н x^2 + Q_н x + R_н) =$$
$$= \frac{(m'r - r'm + (ms - rn)P_н)x^2 + (n'r - m's - s'm - r'n + (ms - rn)Q_н)x}{rx+s} + \frac{n's - s'n + (ms - rn)R_н}{rx+s}.$$

С учетом системы (6) имеем

$$S_t + S_x f_н = \frac{1}{(rx+s)^2}[(((-\frac{mQ_н}{2} + nP_н)r - (-\frac{rQ_н}{2} + sP_н)m + P_н(ms - rn))x^2 + (\frac{nQ_н}{2} + mR_н)r +$$
$$+ (-\frac{mQ_н}{2} + nP_н)s - (\frac{sQ_н}{2} + rR_н)m - (-\frac{rQ_н}{2} + sP_н)n + Q_н(ms - rn))x + (\frac{nQ_н}{2} + mR_н)s -$$
$$- (\frac{sQ_н}{2} + rR_н)n + R_н(ms - rn) = 0.$$

Для четной части

$$S_x f_ч = \frac{ms - rn}{(rx+s)^2}(P_ч x^2 + Q_ч x + R_ч) == \frac{ms - rn}{(rx+s)^2}[(P_0 m^2 + Q_0 mr + R_0 r^2)x^2 + (2P_0 mn + Q_0(nr + ms) +$$
$$+ 2R_0 rs)x + P_0 n^2 + Q_0 ns + R_0 s^2] = \frac{1}{(rx+s)^2}[P_0(m^2x^2 + 2nmx + n^2] + Q_0[mrx^2 + (nr + ms)x + ns) +$$
$$+ R_0(r^2x^2 + 2rs + s^2)] = P_0\left(\frac{mx+n}{rx+s}\right)^2 + Q_0\frac{mx+n}{rx+s} + R_0 = P_0 y^2 + Q_0 y + R_0.$$

Таким образом, замена (2) сводит уравнение (1) к уравнению (4). Тем самым достаточность, а вместе с ней и лемма, доказана.

Теорема 2. *Чтобы некоторой четной дробно-линейной заменой (2), такой, что* $S(0,x)=x$ *и* $ms-rn=1$, *уравнение (1) сводилось к уравнению (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$P_ч{}'=P_чQ_н-Q_чP_н, Q_ч{}'=2R_нP_ч-2P_нR_ч, R_ч{}'=R_нQ_ч-Q_нR_ч. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Подействуем на уравнение (1) заменой (2). Соглас-
но теореме 1, в таком случае должны выполняться равенства (5). Учитывая выражения для
S_x и S_t и приводя подобные во втором уравнении (4), после преобразований, описанных в
лемме 4, придем к системе (6).

Приводя подобные в первом уравнении, получим следующие соотношения:

$$P_ч=P(0)m^2+Q(0)mr+R(0)r^2; R_ч=P(0)n^2+Q(0)ns+R(0)s^2;$$
$$Q_ч=2P(0)mn+Q(0)(ms+rn)+2R(0)rs. \tag{10}$$

Продифференцируем первое уравнение этой системы:

$$2P_ч'=2P_0mm'+Q_0m'r+Q_0mr'+2R_0rr';$$

с учетом соотношений (10),

$$2\dot{P}=2P_0m(-mQ_н-2nP_н)+Q_0m(-rQ_н+2sP_н)+Q_0r(-mQ_н+2nP_н)+2R_0r(-rQ_н+2sP_н)=$$
$$=2P_н(2P_0mn+Q_0(ms+rn)+2R_ors)-2Q_н(P_0m^2+Q_0mr+R_or^2)=2P_нQ_ч-2Q_нP_ч.$$

Тем самым придем к первому уравнению в (9). Аналогично, дифференцируя второе и третье уравнения в (10), получим остальные уравнения в (9).

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (9). Рассмотрим систему (6) с на-
чальным условиями (7) и наряду с ней замену (2) с коэффициентами, удовлетворяющими
этой системе. Покажем, что так взятая замена (2) сводит уравнение (1) к уравнению (4). Для
этого нужно доказать правильность соотношений (8). Возьмем функции

$$U=P_ч-P_0m^2-Q_0mr-R_0r^2, V=Q_ч-2P_0nm-Q_0(ms+rn)-2R_0r\,s,$$
$$W=R_ч-P_0n^2-Q_0ns-R_0s^2.$$

Дифференцируя их, получим систему

$$\dot{U}=Q_нU-P_нV, \dot{V}=2P_нW-2R_нU, \dot{W}=Q_нW-R_нV$$

с начальными условиями $U(0)=V(0)=W(0)=0$.

Эта система с такими начальными условиями имеет единственное нулевое решение
$U\equiv V\equiv W\equiv 0$ [2, с. 53]. Отсюда делаем вывод о справедливости соотношений (8), а тогда по
лемме 4 дифференциальное уравнение (1) сводится заменой (2) к дифференциальному урав-
нению (4).

Теорема 3. *Пусть существует четное по t дробно-линейное преобразование (2), сво-
дящее дифференциальное уравнение Риккати (1) к стационарному дифференциальному
уравнению Риккати и обладающее свойствами* $ms-rn=1$, $S(0,x)=x$, *а решение x(t) уравне-
ния (1) с начальными условиями* $x(-\omega)=y_1$ *продолжимо на* $[-\omega,\omega]$. *Тогда это решение*

2ω – периодично и характер его устойчивости совпадает с характером устойчивости постоянного решения $y(t) \equiv y_1$ стационарного уравнения Риккати (4).

Доказательство. Пусть $y(t) \equiv y_1$ есть устойчивое решение стационарного уравнения Риккати (4). Тогда $\Delta_0 := Q_0^2 - 4P_0R_0 > 0$. В самом деле, если $\Delta_0 < 0$, то стационарное уравнение не имеет постоянных решений. Случай $\Delta_0 = 0$, как нетрудно показать, означает существование единственного неустойчивого (а вернее, полуустойчивого) решения уравнения (4). Итак, $\Delta_0 > 0$, что означает существование у уравнения (4) двух постоянных стационарных решений y_1 и y_2. Будем для определенности считать, что $y_2 > y_1$. В этом случае, как показывает исследование поля направлений уравнения (4), у этого уравнения стационарное решение y_1 – устойчиво, а стационарное решение y_2 – неустойчиво.

Так как $x(t) = S^{-1}(t, y(t))$, то при $y(t) \equiv y_1$ имеет место равенство $x(-\omega) = x(\omega)$, и значит, $x(-\omega)$ является неподвижной точкой отображения за период [3, с.8] системы (1). Поэтому решение *x(t)* 2ω – периодично [4, с.70].

Из асимптотической устойчивости решения y_1 стационарного уравнения (4) следует, что для достаточно близких к y_1 решений уравнения (4) отображение за период $[-\omega;\omega]$ этого уравнения есть сжатие. Это означает, что для достаточно близких к $x(-\omega)$ решений уравнения (1) отображение за период $[-\omega;\omega]$ этого уравнения есть также сжатие, ибо частная производная $\dfrac{\partial x(\omega)}{\partial y(\omega)} = \dfrac{1}{(r(\omega)y(\omega)+s(\omega))^2} > 0$, и функция $x(\omega) = S^{-1}(\omega, y(\omega))$ монотонно возрастает по $y(\omega)$ (отметим, что в данном случае ω является фиксированным значением, а $y(\omega)$ – переменной). Поэтому решение *x(t)*, $x(-\omega) = y_1$ уравнения Риккати (1) также асимптотически устойчиво [5, с.177]. Случаи $y_2 < y_1, y_2 = y_1$ рассматриваются аналогичным образом.

Abstract

Even transformations of the Riccati equations were considered. The received results were applied to investigation of periodic solutions of those equations.

Литература

1. В.В.Степанов, Курс дифференциальных уравнений, М.: Гос. издат. физ.-мат. лит-ры, 1958.

2. Ю.Н.Бибиков, Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Высшая школа, 1991.

3. В. И.Мироненко, Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений, Мн.: Университетское, 1986.

4. В.И.Мироненко, Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений, Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981.

5. В.И.Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Наука.

Поступило 22.05.2002