

УДК 531.3

## СТАТИКА ГИБКОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ПОДВЕСА

Ю.А. Кашин<sup>1</sup>, М.И. Жадан<sup>1</sup>, Р.Е. Кашина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

## STATICS OF FLEXIBLE TRIANGULAR SUSPENSION

Y.A. Kashin<sup>1</sup>, M.I. Zhadan<sup>1</sup>, R.E. Kashina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel

<sup>2</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Получена система нелинейных уравнений, описывающих состояние статического равновесия гибкого треугольного подвеса в плоском силовом поле, компланарном плоскости неизменного треугольника кинематических связей.

**Ключевые слова:** гибкий треугольный подвес, статическое равновесие, кинематические связи, нерастяжимая гибкая нить.

The system of the nonlinear equations describing the condition of static balance of the flexible triangular suspension in a plane force field, coplanar to the plane of the constant triangle of kinematic relations is received.

**Keywords:** flexible triangular suspension, static balance, kinematic relations, not extensible flexible string.

### Введение

Гибким треугольным подвесом тела  $T_B$  к условно неподвижному телу  $T_A$  называем систему двух тел, кинематически связанных двумя напряженными ветвями или отрезками гибкой нити, именуемых поводками, три точки крепления которых к обоим телам являются вершинами действительного  $\Delta PCQ$ , вершины  $P$  и  $Q$ , которого закреплены на подвешенном теле  $T_B$ , а вершина  $C$  – на несущем теле  $T_A$  (рисунок 1).

### 1 Постановка задачи исследования

Целью настоящей работы является изучение состояния статического равновесия гибкого треугольного подвеса в плоском силовом поле, компланарном плоскости треугольника кинематических связей этого подвеса –  $\Delta PCQ$ . Поводки будем рассматривать кусками гибкой нерастяжимой нити [1], [2], концы которых плотно защемлены на телах  $T_A$  и  $T_B$ .

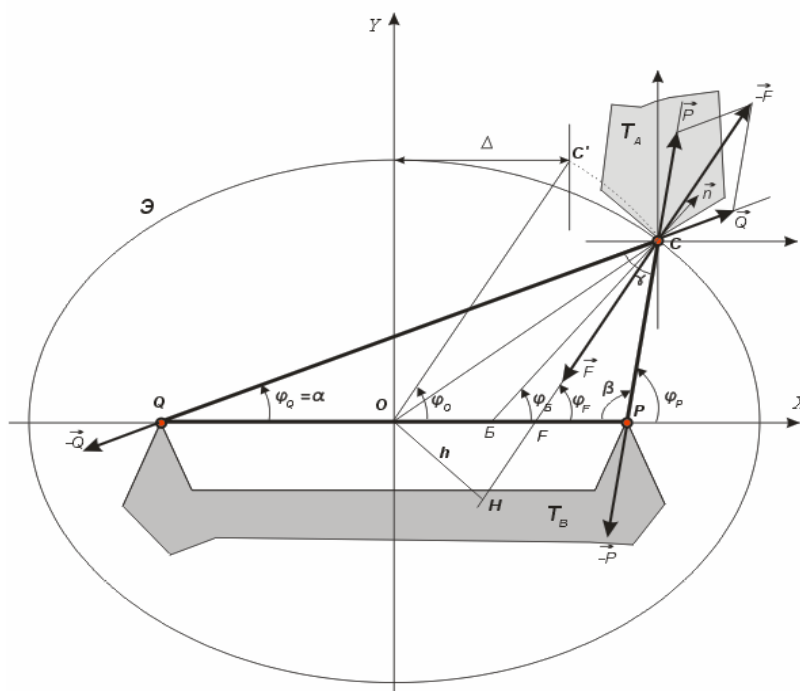


Рисунок 1 – Кинематическая схема гибкого треугольного подвеса тела  $T_B$  к телу  $T_A$

Пусть  $2c$  – длина отрезка  $PQ$ , стягивающего точки крепления поводков на подвешенном теле  $T_B$ ,  $p$  и  $q$  – длины поводков  $PC$  и  $QC$  соответственно,  $p \leq q$  и пусть

$$|\overline{PC}| \leq p, \quad |\overline{QC}| \leq q,$$

где знакам строгого равенства соответствуют строго прямолинейные формы поводков, приобретаемые ими в напряженном состоянии под действием соответствующих концевых растягивающих сил (рисунок 1),

$$P > 0, \quad Q > 0. \quad (1.1)$$

Справедливым считаем и обратное: концевым растягивающим силам поводков, удовлетворяющим условиям (1.1), соответствуют напряженные состояния поводков, их строгая прямолинейность, определенность и неизменность формы и размеров фигуры, образованной  $\Delta PCQ$  и сечением тела  $T_B$  плоскостью этого треугольника.

Положим, что

$$\Delta = \frac{q-p}{2}, \quad (1.2)$$

$$a = \frac{q+p}{2} = const. \quad (1.3)$$

При этом, в силу принятых соглашений и известных свойств треугольников, необходимо выполняются следующие неравенства

$$0 \leq \Delta < c < a. \quad (1.4)$$

Положим также, что

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (1.5)$$

и, что

$$c < b < a. \quad (1.6)$$

Размеры  $p$ ,  $q$  и  $c$ , удовлетворяющие (1.2)–(1.6), будем называть базовыми размерами обсуждаемого бифилярного подвеса, соответствующий  $\Delta PCQ$  – базовым треугольником подвеса, а его плоскость – базовой плоскостью подвеса.

## 2 Решение задачи

Предполагаем, что на тело  $T_B$  действует некоторая определенная система внешних сил  $\overline{F}_k, k = \overline{1, n}$ , линии действия которых лежат в базовой плоскости подвеса, что под действием этой плоской системы сил тело  $T_B$  и удерживающие его поводки занимают такое статическое положение, при котором линия действия построенного в точке  $C$  главного вектора данной системы внешних сил

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k,$$

пересекает отрезок  $PQ$  в его некоторой точке  $F$  и при этом реактивные силы  $\overline{P}$  и  $\overline{Q}$  натяжения поводков телом  $T_A$  уравнивают данную систему внешних сил:

$$\overline{F} + \overline{P} + \overline{Q} = 0. \quad (2.1)$$

Предполагая, что все эти условия выполнены и тело  $T_B$  находится в покое, свяжем с ним систему декартовых координат  $OXYZ$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , плоскость  $OXY$  которой совместим с плоскостью  $\Delta PCQ$ , ось  $OX$  – с линией основания  $PQ$  этого треугольника, а его центральную точку  $O$  примем началом системы координат. В этих условиях вершинами  $\Delta PCQ$  являются точки  $P(c, 0, 0)$ ,  $C(X_C, Y_C, 0)$ ,  $Q(-c, 0, 0)$ , координаты которых связаны следующими уравнениями:

$$q = a + \Delta = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2}$$

$$p = a - \Delta = \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2}.$$

Следовательно,

$$2a = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2} + \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2} = Const, \quad (2.2)$$

$$2\Delta = \sqrt{(X_C + c)^2 + Y_C^2} - \sqrt{(X_C - c)^2 + Y_C^2}. \quad (2.3)$$

Замечаем, что равенства (2.2) являются аналитическим выражением классического определения эллипса  $\mathcal{E}$  геометрическим местом точек  $C(X_C, Y_C)$  плоскости  $OXY$ , сумма расстояний которых до точек  $P(c, 0)$  и  $Q(-c, 0)$ , именуемых фокусами эллипса, постоянна и равна длине его большей оси  $2a$ .  $\Delta PCQ$  и эллипс  $\mathcal{E}$ , однозначно определяемые базовыми размерами  $p$ ,  $q$  и  $c$  данного бифилярного подвеса, условимся называть его базовым треугольником кинематических связей и его базовым эллипсом. Плоскость их расположения  $OXY$  назовем базовой плоскостью подвеса. Каноническое уравнение эллипса  $\mathcal{E}$

$$\frac{X_C^2}{a^2} + \frac{Y_C^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

получается исключением радикалов в уравнении (2.3) и его последующими преобразованиями. Абсциссу точки  $C$  находим перемножением обеих частей равенств (2.2) и (2.3):

$$X_C = \frac{a\Delta}{c}. \quad (2.5)$$

Это значение подставляем в уравнение (2.4) и, решая его, получаем ординату точки  $C$ :

$$Y_C = \pm \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2}, \quad (2.6)$$

где, для определенности выбора точки  $C$  сохраняем знак плюс (+).

Уравнение пучка прямых плоскости  $OXY$ , проходящих через точку  $C\left(\frac{a\Delta}{c}, \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2}\right)$ ,

имеет вид:

$$Y - \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \Delta^2} = k \left( X - \frac{a\Delta}{c} \right), \quad (2.7)$$

где

$$k = tg\varphi \quad (2.8)$$

– угловой коэффициент соответствующей прямой данного семейства,  $\varphi$  – ее угол наклона к оси  $OX$ .

Если некоторая прямая  $\Pi$  этого семейства ось  $OX$  пересекает в определенной точке  $D(d, 0)$  основания  $PQ \Delta PCQ$  при  $d \in [-c, c]$ , то условимся обозначать  $k_D$  ее угловой коэффициент,  $\varphi_D$  – ее угол наклона к оси  $OX$ , и, удовлетворяя уравнениям (2.7) и (2.8), будем считать, что

$$k_D = tg\varphi_D = \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - cd}.$$

В соответствии с этим правилом устанавливаем, что для линий действия сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  и  $\vec{F}$ , являющихся прямыми этого же семейства и проходящих через точки  $P(c, 0)$ ,  $Q(-c, 0)$ ,  $F(f, 0)$ , угловые коэффициенты, соответственно, равны

$$k_P = tg\varphi_P, \quad k_Q = tg\varphi_Q \quad \text{и} \quad k_F = tg\varphi_F$$

и что их углы наклона к оси  $OX$  определяются значениями

$$\varphi_P = \arctg \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - c^2} \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\varphi_Q = \arctg \frac{-b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta + c^2} \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

и при  $f \in [-c, c]$

$$\varphi_F = \arctg \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - fc} \in [\varphi_P, \varphi_Q].$$

В то же время, основываясь на известных свойствах углов треугольников, заключаем, что

$$\varphi_Q = \varphi_P + \gamma.$$

Внутренний угол  $\gamma \Delta PCQ$  при его вершине  $C$ , образованный линиями действия сил  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  находим на основании теоремы косинусов и устанавливаем, что

$$\gamma = \arccos \frac{c^2 - b^2 - \Delta^2}{a^2 - \Delta^2} \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Удовлетворяя представленным зависимостям, угол  $\varphi_F$  выразим линейной комбинацией его предельных значений  $\varphi_P$  и  $\varphi_Q$ :

$$\varphi_F = \lambda\varphi_Q + (1 - \lambda)\varphi_P = \varphi_P + \lambda\gamma,$$

где  $\lambda \in [0, 1]$  – неопределенный множитель Лагранжа. Легко заметить, что при  $\lambda = \frac{1}{2}$  угол наклона к оси  $OX$  силы  $\vec{F}$  равен

$$\varphi_F = \varphi_P + \gamma/2 = \varphi_Q - \gamma/2,$$

следовательно, он совпадает с углом наклона  $\varphi_B$  биссектрисы  $CB$  угла  $\gamma$ , которая, как известно из планиметрии [3], своей точкой  $B(\delta, 0)$  пересечения основания  $PQ$  базового  $\Delta PCQ$  делит

его на отрезки  $PB$  и  $BQ$ , пропорциональные длинам прилегающих боковых сторон  $PC$  и  $QC$  этого треугольника:

$$\frac{QB}{BP} = \frac{c + \delta}{c - \delta} = \frac{q}{p} = \frac{a + \Delta}{a - \Delta}.$$

Из этих уравнений находим значение  $\delta = \frac{\Delta c}{a}$  и вычисляем угловой коэффициент биссектрисы  $CB$

$$k_B = tg\varphi_B = \frac{b\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{a\Delta - c\delta} = \frac{ab\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{\Delta(a^2 - c^2)} = \frac{a\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{\Delta b}.$$

Затем, используя зависимости (2.5) и (2.6), при  $\Delta \in [-c, c]$  определяем угловой коэффициент  $k_n$  нормали базового эллипса  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$  и устанавливаем, что:

$$k_n = tg\varphi_n = -\frac{dX_c}{dY_c} = \frac{a\sqrt{c^2 - \Delta^2}}{b\Delta} = k_B.$$

Этот результат означает, что биссектриса  $CB$  угла  $\gamma$ , образованного при вершине  $C$  базового  $\Delta PCQ$  поводками  $PC$  и  $QC$ , совпадает с нормалью базового эллипса  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$ .

Располагая углами ориентации векторов  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  и  $\vec{F}$ , представим их в координатной форме в виде:

$$\vec{P} = P(\vec{i} \cos \varphi_P + \vec{j} \sin \varphi_P),$$

$$\vec{Q} = Q(\vec{i} \cos \varphi_Q + \vec{j} \sin \varphi_Q),$$

$$\vec{F} = F(\vec{i} \cos \varphi_F + \vec{j} \sin \varphi_F).$$

Эти значения подставляем в уравнение (2.1), проектируя его на оси координат, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} F \cos \varphi_F = P \cos \varphi_P + Q \cos \varphi_Q \\ F \sin \varphi_F = P \sin \varphi_P + Q \sin \varphi_Q. \end{cases}$$

Ее решениями являются значения

$$P = F \frac{\sin \lambda \gamma}{\sin \gamma}, \quad Q = F \frac{\sin(1 - \lambda) \gamma}{\sin \gamma}, \quad (2.9)$$

которые при  $F > 0$  и  $\gamma \in [0, \pi]$  удовлетворяют условиям (1.1), при выполнении которых сечение тела  $T_B$  базовой плоскостью и базовый треугольник  $\Delta PCQ$  образуют неизменную фигуру, нагруженную заданной системой внешних сил, уравновешенных реактивными силами натяжения поводков несущим телом  $T_A$ .

Из формул (2.9) следует, что равенству сил натяжения обоих поводков соответствует значение  $\lambda = \frac{1}{2}$ , т.е. случай, когда сила  $\vec{F}$  нормальна к базовому эллипсу  $\mathcal{E}$  в его точке  $C$ , являющейся вершиной базового  $\Delta PCQ$ .

### Заключение

Резюмируя изложенное, констатируем, что для достижения некоторого состояния статического равновесия гибкого треугольного подвеса с данным базовым неизменным треугольником кинематических связей  $\Delta PCQ$  в плоском силовом поле, компланарном плоскости этого треугольника, необходимо и достаточно, чтобы построенный в таком стационарном состоянии подвеса с началом в точке  $C$  крепления обоих поводков на несущем теле  $T_A$  главный вектор  $\vec{F}$  действующих на подвешенное тело  $T_B$  внешних сил был ориентирован в направлении тела  $T_B$ , а линия его действия пересекала отрезок  $PQ$ ,

стягивающий точки крепления поводков на теле  $T_B$  в некоторой точке  $F$  этого отрезка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц, Н.Н. Основы курса теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1972. – 468 с.
2. Щедров, В.С. Механика гибкой нити / В.С. Щедров. – М. : МАШГИЗ, 1961. – 171 с.
3. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М. : Наука, 1966. – 424 с.

Поступила в редакцию 08.07.10.