Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(19), 2003

УДК 519.533

Свободные полугруппы идемпотентов

А.В. Жучок

Одним из эффективных средств описания факторизационных свойств полугрупп является понятие полуретракции, определенное в работах В.М.Усенка (см., например, [1]). С использованием полуретракций, в частности, описываются декомпозиции свободных полугрупп в прямоугольные и коммутативные связки [2,3]. Естественно, возникает задача классификации полуретракций свободных моноидов по свойствам соответствующих мутаций [1].

В этой работе описаны полуретракции свободного моноида, мутации которых являются свободными полугруппами идемпотентов.

Терминология и обозначения соответствуют принятым в [4].

1. Преобразование τ моноида M назовем полуретракцией, если

$$(xy)\tau = (x\tau\, y\tau)\tau$$

при любых $x, y \in M$.

Если τ — полуретракция моноида M, то непосредственно проверяется, что множество $Im\tau$ является моноидом относительно операции $x \cdot_\tau y = (xy)\tau,\ x, y \in Im\tau$. Моноид $M^\tau = (Im\tau,\ \cdot_\tau)$ будем называть τ–мутацией моноида M.

Через $\Im(X)$ будем обозначать симметрическую полугруппу на множестве X.

2. Пусть $F^\theta = F^\theta[X]$– свободный моноид в алфавите $X = \{x_1, ..., x_n\}$, θ — пустое слово, $F = F[X]$–свободная полугруппа в том же алфавите.

Через $c(w)$ обозначим множество элементов $x \in X$, которые входят в запись элемента $w \in F$. Для каждого $w \in F$ определим отношение $\rho_w \in X \times X$ так, что $(x_i, x_j) \in \rho_w$ тогда и только тогда, когда $x_i \neq x_j$ и элемент x_i первее чем x_j появляется в записи слова w. Очевидно, что отношения $\rho_w,\ w \in F$ являются транзитивными.

Для всех $w \in F^\theta$ определим преобразование $\gamma^\ell \in \Im\left(F^\theta\right)$, полагая

$$w\gamma^\ell = \begin{cases} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m} \Leftrightarrow c\left(w\right) = c\left(w\gamma^\ell\right),\ \left(x_{i_s}, x_{i_{s+1}}\right) \in \rho_w,\ 1 \leqslant s \leqslant m-1 \\ \theta,\ w = \theta. \end{cases}$$

Преобразование γ^ℓ будем называть левым упорядочиванием моноида F^θ.

С помощью преобразования $f : F \to F$, которое на любом $w = x_{i_1}\ldots x_{i_m} \in F$ действует по правилу $wf = \left(x_{i_1}\ldots x_{i_m}\right)f = x_{i_m}\ldots x_{i_1}$, определим преобразование $\gamma^r = f\gamma^\ell f \in \Im\left(F^\theta\right)$ $(\theta\gamma^r = \theta)$.

Преобразования γ^r будем называть правым упорядочиванием моноида F^θ.

Нетрудно убедиться, что $\gamma^\ell = f\gamma^r f$. Имеет место

Лемма 1. *Левое (правое) упорядочивание свободного моноида является его полуретракцией.*

Доказательство. Если $c\left(w_1\right) \cap c\left(w_2\right) = \emptyset$ при некоторых $w_1, w_2 \in F$, то, очевидно,

$$\left(w_1w_2\right)\gamma^\ell = w_1\gamma^\ell w_2\gamma^\ell = \left(w_1\gamma^\ell w_2\gamma^\ell\right)\gamma^\ell.$$

Пусть $c(w_1) \cap c(w_2) \neq \emptyset$. Тогда

$$(w_1 w_2)\gamma^\ell = (w_1 \gamma^\ell w_2)\gamma^\ell$$

и, с другой стороны,

$$(w_1 w_2)\gamma^\ell = (w_1 w_2 \gamma^\ell)\gamma^\ell \quad ,$$

откуда γ^ℓ — полуретракция моноида F.

Случай, при котором $w_1, w_2 \in F^\theta$ и $\theta \in \{w_1, w_2\}$, является очевидным.

Таким образом, $(w_1 w_2)\gamma^\ell = (w_1 \gamma^\ell w_2 \gamma^\ell)\gamma^\ell$ при любых $w_1, w_2 \in F^\theta$.

Аналогично доказывается, что преобразование γ^r является полуретракцией моноида F^θ. Лемма доказана.

Теорема 1. *Моноид* $(F^\theta)^{\gamma^\ell}$ $\;((F^\theta)^{\gamma^r})$ *является свободным моноидом идемпотентов.*

Доказательство. Поскольку

$$w_1 \cdot_{\gamma^\ell} w_1 = (w_1 w_1)\gamma^\ell = w_1 \gamma^\ell = w_1$$

при любом $w_1 \in (F^\theta)^{\gamma^\ell}$, то понятно, что мутация $(F^\theta)^{\gamma^\ell}$ моноида F^θ является моноидом идемпотентов. Кроме этого, поскольку $x\gamma^\ell = x$ для всех $x \in X$, то согласно теореме 3.5 работы [1] моноид $(F^\theta)^{\gamma^\ell}$ – свободный в многообразии моноидов идемпотентов. Для моноида $((F^\theta)^{\gamma^r})$ доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

3. Пусть $M(X)$–булеан на множестве $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Для каждого подмножества $g_i \in M(X)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $m = |M(X)|$ определим множество $G_{g_i} = \{w \in F^\theta | c(w) = g_i, \ell_w = |g_i|\}$ (ℓ_w– длина слова w). Если $t = (t_1, ..., t_k, ..., t_m) \in G_{g_1} \times ... \times G_{g_m}$, то определим преобразование $\sigma_t \in \Im(F^\theta)$, полагая

$$w\sigma_t = t_k \Leftrightarrow c(w) = g_k, \quad w \in F^\theta.$$

Лемма 2. *Любое преобразование* $\sigma_t \in \Im(F^\theta)$, $t \in G_{g_1} \times ... \times G_{g_m}$ *свободного моноида является его полуретракцией.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$t_k \cdot_{\sigma_t} t_p = t_p \cdot_{\sigma_t} t_k \tag{1}$$

при любых $g_k,\ g_p \in M(X)$.

Если элементы $w_1, w_2 \in F^\theta$ являются такими, что $c(w_1) = g_k,\ c(w_2) = g_p$, то

$$(w_1 \cdot w_2)\sigma_t = t_k \cdot_{\sigma_t} t_p = (t_k t_p)\sigma_t = (w_1\sigma_t w_2\sigma_t)\sigma_t$$

и, следовательно, σ_t–полуретракция моноида F^θ. Лемма доказана.

Теорема 2. *Любой моноид* $(F^\theta)^{\sigma_t}$ $(t \in G_{g_1} \times \ldots \times G_{g_m})$ *является свободным коммутативным моноидом идемпотентов.*

Доказательство. Из тождества (1) вытекает, что $(F^\theta)^{\sigma_t}$ (t — фиксированное) является коммутативным моноидом идемпотентов. Кроме этого, поскольку полуретракция σ_t (t– фиксированное) тождественная на X, то согласно теореме 3.5 работы [1] моноид $(F^\theta)^{\sigma_t}$ является свободным в многообразии моноидов идемпотентов. Теорема доказана.

4. Если $a,\ w \in F$, то будем говорить, что элемент a является делителем элемента w (в обозначениях $a|w$), если $w = paq, \quad p, q \in F^\theta$.

Для всех $w \in F,\ x_i \in X,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ положим

$$\varepsilon_i(w) = \begin{cases} 0, & x_i \not| w \\ 1, & x_i | w \end{cases}.$$

Пусть $T \in M(X)$ (см.п.3), $\vartheta = (x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}) \in P^T$, где P^T−множество перестановок на T.

Преобразования μ_T^ϑ $(T \in M(X), \vartheta \in P^T)$ свободного моноида такие, что

$$w\mu_T^\vartheta = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}(w)} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}(w)} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}(w)}$$

для всех $w \in F^\theta$ будем называть $(T;\vartheta)$−линеризациями. Имеет место

Лемма 3. *Любая $(T;\vartheta)$−линеризация свободного моноида является его полуретракцией.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что $\varepsilon_i(w_1 w_2) = \varepsilon_i(w_1) + \varepsilon_i(w_2)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $w_1, w_2 \in F^\theta$. Для любых $w_1, w_2 \in F^\theta$ при этом получаем:

$$(w_1 w_2)\mu_T^\vartheta = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}(w_1 w_2)} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}(w_1 w_2)} = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}(w_1)+\varepsilon_{i_1}(w_2)} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}(w_1)+\varepsilon_{i_k}(w_2)} =$$
$$= (x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}(w_1)} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}(w_1)} x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}(w_2)} \cdot ... \cdot x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}(w_2)})\mu_T^\vartheta = (w_1 \mu_T^\vartheta w_2 \mu_T^\vartheta)\mu_T^\vartheta,$$

откуда следует утверждаемое. Лемма доказана.

Через $B = (\{0,1\};+)$ обозначим адитивную полугруппу такую, что $0+1 = 1+0 = 1+1 = 1,\ 0+0 = 0$. Имеет место

Теорема 3. *Для любой $(T;\vartheta)$−линеризации μ_T^ϑ свободного моноида F^θ*

$$(F^\theta)^{\mu_T^\vartheta} \cong B^k.$$

Доказательство. Элементами полугруппы $(F^\theta)^{\mu_T^\vartheta}$ являются, очевидно, элементы $\nu = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $\varepsilon_{i_p} \in \{0;1\},\ 1 \leqslant p \leqslant k$. Определим отображение

$$\psi : (F^\theta)^{\mu_T^\vartheta} \to B^k : \nu \mapsto \nu\psi = (x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}})\psi = (\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, ..., \varepsilon_{i_k}).$$

По построению ψ является биективным отображением полугруппы $(F^\theta)^{\mu_T^\vartheta}$ на полугруппу B^k.

Для завершения доказательства отметим, что для произвольных $\nu_1 = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}, \nu_2 = x_{i_1}^{\varepsilon_{j_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{j_k}} \in (F^\theta)^{\mu_T^\vartheta}$ имеем :

$$(\nu_1 \cdot_{\mu_T^\vartheta} \nu_2)\psi = (x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}} x_{i_1}^{\varepsilon_{j_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{j_k}})\mu_T^\vartheta \psi = (x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}+\varepsilon_{j_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}+\varepsilon_{j_k}})\psi =$$
$$= (\varepsilon_{i_1}+\varepsilon_{j_1}, ..., \varepsilon_{i_k}+\varepsilon_{j_k}) = (\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_k})(\varepsilon_{j_1}, ..., \varepsilon_{j_k}) =$$
$$= (x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}})(x_{i_1}^{\varepsilon_{j_1}} ... x_{i_k}^{\varepsilon_{j_k}}) = \nu_1\psi\, \nu_2\psi.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Любой моноид $(F^\theta)^{\mu_X^\vartheta}$ $(\vartheta \in P^X)$ является свободным коммутативным моноидом идемпотентов.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $(F^\theta)^{\mu_X^\vartheta}$ $(\vartheta \in P^X)$ является коммутативным моноидом идемпотентов. Кроме этого, поскольку полуретракция $(F^\theta)^{\mu_X^\vartheta}$ $(\vartheta \in P^X)$ тождественная на X, то согласно теореме 3.5 работы [1] моноид $(F^\theta)^{\mu_X^\vartheta}$ $(\vartheta \in P^X)$ является свободным в многообразии моноидов идемпотентов. Теорема доказана.

Abstract

Some semiretractions of a free monoid are described.

Литература

1. Усенко В.М. Напівретракції моноїдів// Труды ИПММ НАН Украины. — Т. 5 — 2000. — С. 155—164.

2. Кизименко А.М. Свободные полугруппы и прямоугольные связки // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л.А. Калужніна. (Київ — Вінниця, траень 1999). — Вінниця: ВДПУ. — 1999. — С. 85.

3. Кизименко А.М. Свободные полугруппы и комутативные связки // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л.А. Калужніна. (Київ — Вінниця, траень 1999). — Вінниця : ВДПУ. — 1999. — С. 84 — 85.

4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // М.:Мир. — 1972. — Т. 1 — С. 285.

Славянский государственный
педагогический университет

Поступило 10.04.03