Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(19), 2003

УДК 512.542

К вопросу о перестановочности корадикалов подгрупп

С.Ф.Каморников, А.В.Карпеш

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1–2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует такая цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H,$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая нильпотентная формация, то для любой группы множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп. В связи с этим понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы рассматривается как одно из естественных формационных обобщений понятия субнормальной подгруппы.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация и G — группа, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

В теории формаций проблеме перестановочности корадикалов субнормальных подгрупп уделяется значительное место (см., например, работы [3–5]). Одним из центральных в этом направлении является следующий результат из [4–5].

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда для любых двух субнормальных подгрупп H и K группы G справедливо равенство

$$H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}} H^{\mathfrak{F}}.$$

Цель настоящей заметки — распространить указанный результат на $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — наследственные формации, причем $\mathfrak{H}$ — локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G. Если h — наследственный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq h(p)$ для любого простого p, то*

$$H^{\mathfrak{H}} K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}} H^{\mathfrak{H}}.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то подгруппа H является $\mathfrak{H}$-достижимой. Отсюда из наследственности формации $\mathfrak{H}$ на основании леммы 3.1.5 из [1] заключаем, что $H^{\mathfrak{H}} \in sn(G)$.

Так как $\mathfrak{F} \subseteq h(p)$ для любого простого p, то подгруппа H является $h(p)$-достижимой. Снова применяя лемму 3.1.5 из [1], получаем, что $H^{h(p)}$ — субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $\pi(H) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Тогда ввиду леммы 3.2 из [4]

$$H^{\mathfrak{H}} = (H^{h(p_1)})^{\mathfrak{F}_1} (H^{h(p_2)})^{\mathfrak{F}_2} \ldots (H^{h(p_n)})^{\mathfrak{F}_n},$$

где $\mathfrak{F}_i$ — формация всех p_i-нильпотентных групп, $i = 1, 2, \ldots, n$. На основании леммы 6 из [5] подгруппа $(H^{(p_i)})^{\mathfrak{F}_i}$ перестановочна с любой субнормальной подгруппой группы G, а значит,

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = (H^{h(p_1)})^{\mathfrak{F}_1}(H^{h(p_2)})^{\mathfrak{F}_2}\ldots(H^{h(p_n)})^{\mathfrak{F}_n}K^{\mathfrak{H}} =$$

$$K^{\mathfrak{H}}(H^{h(p_1)})^{\mathfrak{F}_1}(H^{h(p_2)})^{\mathfrak{F}_2}\ldots(H^{h(p_n)})^{\mathfrak{F}_n} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}.$$

Теорема доказана.

Замечания: 1). Если локальная формация $\mathfrak{H}$ наследственна, то она обладает, по крайней мере, одним наследственным внутренним локальным экраном h . На основании теоремы 4.7 из [2] таковым является максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$.

2). Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех неабелевых простых групп, $\mathfrak{F}=form\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Если $G\simeq PSL(2,5)$ и H — подгруппа из G, имеющая порядок 12, то H $\mathfrak{F}$-достижима в G. При этом $H^{\mathfrak{H}}$ — силовская 2-подгруппа группы G. Если бы подгруппа $H^{\mathfrak{H}}$ была перестановочна с $\mathfrak{H}$-корадикалами $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп группы G, то $H^{\mathfrak{H}}$ была бы нормальна в G, что противоречит простоте группы G. Таким образом, условие наследствености формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ в теореме существенно и его отбросить нельзя.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}$$

для любых субнормальных подгрупп H и K группы G.

Результат является прямым следствием теоремы в случае, когда $\mathfrak{F}=(1)$ — формация единичных групп.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если h — наследственный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, содержащаяся в $\bigcap_{p\in P} h(p)$, то для любых $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K справедливо равенство*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}.$$

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — наследственная формация. Тогда для любой наследственной локальной формации $\mathfrak{H}$, содержащей формацию $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$, и любых двух $\mathfrak{M}$-достижимых подгрупп H и K группы G справедливо равенство*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}.$$

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая все разрешимые группы. Тогда*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}$$

для любых $\mathfrak{S}$-достижимых подгрупп H и K группы G .

Следствие 5. *Пусть h — наследственный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, содержащей все нильпотентные группы. Если $\mathfrak{F}=\bigcap_{p\in P}h(p)$, то для любых подгрупп H и K, содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, справедливо равенство*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}.$$

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, а $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая формацию $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$. Тогда*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}$$

для любых подгрупп H и K группы G, содержащих ее $\mathfrak{M}$-корадикал.

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая все разрешимые группы. Тогда*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}$$

для любых подгрупп H и K группы G, содержащих ее разрешимый корадикал.

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{A}$— формация всех сверхразрешимых групп, а $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация, содержащая формацию $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть H и K — подгруппы разрешимой группы G. Если существуют максимальные $(G-H)$-цепь и $(G-K)$-цепь с простыми индексами, то*

$$H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}.$$

Abstract

All groups considered are finite. A subgroup H of a group G is called $\mathfrak{F}$-accessible if there is a chain $G = H_0 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ such that for each i either H_i is normal in H_{i-1} or $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be S-closed formations and $\mathfrak{H} = LF(h)$ where h is an integrated function such that for every prime p, a formation $h(p)$ is an S-closed non-empty class containing $\mathfrak{F}$. If H and K are $\mathfrak{F}$-accessible subgroups of a group G then it is proved that $H^{\mathfrak{H}}K^{\mathfrak{H}} = K^{\mathfrak{H}}H^{\mathfrak{H}}$.

Литература

1. Каморников С.Ф.,Селькин М.В. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп.(Препринт/Гомельский госуниверситет). Гомель.2001.2 (107). 236 с.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М. : Наука, 1978.
3. Wielandt H. Vertauschbare nachinvariante Untergruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1957. Bd. 21, №1–2. S. 55–62.
4. Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. О корадикалах субнормальных погрупп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, №5. С. 493–513.
5. Каморников С.Ф. Перестановочные субнормальные подгруппы конечных групп// ДАН БССР. 1989. Т. 33, №5. С. 396—399.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 10.04.03